Einleitung

in die

Analysis des Unendlichen.

Von

Leonhard Euler.

Erster Teil.

Ins Deutsche übertragen

von

H. Maser.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1885.

Printed in Germany

Es liegt die Absicht vor, **mathematische Werke, welche auf die Entwicklung der reinen Mathematik einen wesentlichen Einfluss geübt haben,** allen Denen, welche die Wissenschaft an der Quelle zu schöpfen wünschen, in leichterer Weise, als dies bisher der Fall gewesen ist, zugänglich zu machen.

Die Beweggründe hierzu lassen sich kurz zusammenfassen:

Wenn der Entwicklungs-Standpunkt einer Wissenschaft einzig und allein nach der Anzahl ihrer Jünger beurtheilt werden könnte, so hätte die Mathematik sicher keine Ursache zur Klage. Indess, da trotz des vermehrten Andranges zu diesem Studium in akademischen Lehrkreisen Rufe laut werden, welche über das geringe Mass wahrer wissenschaftlicher Leistungen ihr Befremden aussprechen, so ist es Pflicht, solchen ernsten Worten nicht das Ohr zu verschliessen, sondern mit Sorgfalt den Ursachen dieses Missstandes nachzuforschen.

Nur der Geschicklichkeit und Gewissenhaftigkeit unserer Docenten ist es zu danken, dass es überhaupt möglich ist, in dem kurzen, für den Universitätsbesuch in Aussicht genommenen Zeitraum dasjenige Material zu reichen, welches zur Lösung mathematischer Probleme befähigt. Mit dem Geben dieses Stoffes ist aber der Wissenschaft noch nicht Genüge getan. Wer an ihrem Fortbau mitwirken soll, muss den Bildungsgang derselben kennen, er muss wissen, was und in welcher Weise vor ihm gearbeitet worden ist. Nun vermögen zwar Universitätsvorträge die Entwicklung der Mathematik in grossen Zügen zu zeichnen, mehr aber nicht; das innige Befreunden mit dieser Wissenschaft bleibt dem Privatfleisse vorbehalten und dieser fordert vor Allem das Studium derjenigen Werke, welche auf die Gestaltung der Mathematik einen hervorragenden Einfluss ausgeübt haben.

Die akademische Jugend hierzu anzuspornen, ist das Bestreben der Universitätslehrer; sie sind bemüht, durch historische Schlaglichter wissenschaftlichen Sinn zu wecken, und betrachten das Gelingen als den höchsten Lohn ihres Berufes.

Aber dann, wenn die ausgestreuten Körner auf fruchtbaren Boden gefallen sind, treten dem jungen Forscher materielle Schwierigkeiten in den Weg. Die ältere mathematische Literatur ist teils vergriffen, teils existirt sie nur in sehr teueren Ausgaben. Wenn nun auch diese Werke in den Staatsbibliotheken vorhanden sind, so genügt für ein tieferes

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlags.

Einleitung

in die

Analysis des Unendlichen.

Von

Leonhard Euler.

Erster Teil.

Ins Deutsche übertragen

von

H. Maser.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1885.

Vorwort des Uebersetzers.

Meisterwerke üben ihren Einfluss auf die Fortbildung der Wissenschaft nicht allein durch die in ihnen niedergelegten Resultate des forschenden Geistes, es lebt in ihnen eine schöpferische Kraft, die, nie ersterbend, immer neue Keime weckt und fort und fort bis in die späte Ferne hinaus edle Früchte zeitigt. Derartige Geistesproducte, wenn sie selten werden, in ihrer ganzen Fülle ohne Unterlass von Neuem weiteren Kreisen zugänglich zu machen, halte ich für kein nutzloses Beginnen. Eben dem Zwecke soll auch die Herausgabe der vorliegenden, gänzlich neuen Uebersetzung des ersten Teils von Euler's *„Introductio in Analysin infinitorum"* dienen. Dieses durch den Reichtum seines Inhalts, durch die Feinheit der Methoden und durch die ausserordentliche Klarheit und Präcision der Darstellung ausgezeichnete, in arithmetischer Weise aufgebaute Werk, welches weite Perspectiven eröffnet, ist heutzutage, trotzdem oder vielleicht gerade weil fast alle neueren Lehrbücher aus ihm als aus einer nie versiegenden Quelle schöpfen, schon halb in Vergessenheit geraten, und dies ist um so mehr zu bedauern, als sich dem Anscheine nach die Erkenntnis geltend macht, dass eine schärfere Bestimmung der Begriffe auch eine weitere Entwicklung der Analysis mit Euler'schen Reminiscenzen auf rein arithmetischer Grundlage ermöglichen dürfte.

Bei dieser Uebersetzung habe ich mich nicht allzu ängstlich an den Buchstaben gebunden, gleichwohl bin ich bestrebt gewesen, in den Geist des Originals einzudringen und bei getreuer Wiedergabe des Sinnes auch die Einfachheit und Klarheit seiner Sprache zum Ausdruck zu bringen. Ja es ist vielleicht die Uebersichtlichkeit über das Ganze und das Verständniss des Einzelnen noch dadurch erleichtert worden, dass ich in jedem Paragraphen die den Inhalt charakterisirenden Worte durch den Druck hervorgehoben habe. An dem Euler'schen Werke irgendwelche Kritik zu üben, lag indessen nicht in der Absicht, weshalb erläuternde oder ergänzende Anmerkungen selbst an den Stellen nicht hinzugefügt wurden, an welchen dasselbe vom heutigen Standpunkte der Wissenschaft aus Lücken aufweist. Die zahlreichen Druckfehler, welche sich im Originale vorfinden, habe ich, sobald sie sich nur als solche ausgewiesen, verbessert, und dürften die Rechnungen und Formeln der Uebersetzung, zumal auch auf die Durchsicht des Druckes die grösste Sorgfalt verwendet worden ist, als correct zu bezeichnen sein.

Berlin, October 1884.

H. Maser.

Vorwort des Verfassers.

Der grösste Teil der Schwierigkeiten, mit denen gewöhnlich die Jünger der mathematischen Wissenschaft bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen zu kämpfen haben, hat nach meiner Erfahrung darin seinen Grund, dass man sich bereits an jene höhere Kunst heranwagt, bevor man noch recht die niedere Algebra sich angeeignet hat. Dies hat zur Folge, nicht nur, dass man gewissermassen an der Schwelle stehen bleibt, sondern auch, dass sich von dem Begriffe des Unendlichen ganz verkehrte Ansichten herausbilden. Nun setzt zwar die Analysis des Unendlichen nicht gerade eine vollkommene Kenntnis der niederen Algebra und aller ihrer bisher gefundenen Kunstgriffe voraus; indessen giebt es in letzterer doch so manche Fragen, deren gründliche Beantwortung den Anfänger auf jene höhere Wissenschaft vorzubereiten geeignet ist, und die trotzdem in den gewöhnlicheren Lehrbüchern der Algebra entweder ganz und gar übergangen oder doch nur obenhin behandelt werden. Was ich in dem vorliegenden Werke zusammengestellt habe, dürfte dem erwähnten Mangel, wie ich glaube, vollständig abzuhelfen im Stande sein. Denn ich habe nicht nur das, was die Analysis des Unendlichen durchaus voraussetzen muss, zwar weitläufiger aber strenger, als dies gewöhnlich geschieht, zu begründen gesucht, sondern auch viele Fragen erledigt, durch welche der Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich und, ohne es selbst zu merken, vertraut wird. Ueberdies habe ich, um die grosse Uebereinstimmung der beiden Wege leichter kenntlich zu machen, mehrere Gegenstände, die man sonst in der Analysis des Unendlichen zu behandeln pflegt, nach den Regeln untersucht, welche die niedere Algebra an die Hand giebt.

Ich habe dieses Werk in zwei Teile geteilt und in dem ersten alles das zusammengefasst, was zur reinen Analysis gehört, in dem zweiten dagegen alles Wissenswerte aus der Geometrie mitgeteilt, da man die Analysis des Unendlichen gewöhnlich so vorträgt, dass man zugleich die Anwendung derselben auf die Geometrie zeigt.

In beiden Teilen habe ich jedoch die ersten Anfangsgründe unberücksichtigt gelassen und nur das entwickeln zu müssen geglaubt, was man anderwärts entweder gar nicht oder in nicht so bequemer Weise oder endlich auf anderm Wege abgeleitet findet.

Während also die gesamte Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Zahlgrössen und deren Functionen handelt, nehme ich im ersten Teile hauptsächlich die Functionen zum Gegenstande einer ausführlicheren Untersuchung und zeige, wie man dieselben umformen, zerlegen und in unendliche Reihen entwickeln kann. Ich zähle mehrere Arten von Functionen auf, die in der höheren Analysis eine besonders wichtige Rolle spielen, und unterscheide da zuerst die algebraischen und transcendenten Functionen, von denen jene nur mittelst der in der niederen Algebra gebräuchlichen Rechnungsarten aus den veränderlichen Zahlgrössen gebildet werden, diese aber entweder mittelst der andern Rechnungsarten entstehen, oder nur durch unendlichoftmalige Wiederholung der algebraischen Operationen sich darstellen lassen. Die algebraischen Functionen zerfallen ihrerseits wieder in rationale und irrationale. Erstere lassen sich, was für die Integralrechnung von ganz besonderer Bedeutung ist, in Factoren und in Partialbrüche zerlegen; letztere können mitunter durch zweckmässige Substitutionen auf eine rationale Form gebracht werden. Die Entwicklung in unendliche Reihen aber ist für beide Arten von Functionen in gleicher Weise möglich und kann auch häufig auf transcendente Functionen mit grossem Vorteil angewandt werden. Ja es hat bekanntlich gerade durch die Lehre von den unendlichen Reihen die höhere Analysis sehr bedeutende Erweiterungen erfahren. In einigen weiteren Capiteln habe ich die Eigenschaften mehrerer unendlichen Reihen und deren Summen ermittelt, was bei vielen derselben ohne Hülfe der Analysis des Unendlichen geradezu unmöglich sein dürfte. Hierzu gehören z. B. die Reihen, deren Summen sich durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausdrücken lassen. Diese Grössen werden gewöhnlich, da sie transcendent sind, nämlich aus der Quadratur der Hyperbel und des Kreises erhalten werden, erst in der Analysis des Unendlichen behandelt. Indessen erhalte ich, indem ich von den Potenzen zu den Exponentialgrössen, welches ja nur Potenzen mit veränderlichen Exponenten sind, fortschreite, den fruchtbaren Begriff der Logarithmen in der natürlichsten Weise durch Umkehrung der Exponentialgrössen. Auf diesem Wege ergiebt sich nicht allein der ausserordentliche Nutzen der Logarithmen ganz von selbst, sondern man erhält so zu gleicher Zeit sämtliche unendliche Reihen, durch die man diese Grössen gewöhnlich darstellt. Ebenso leicht folgt daraus ein Verfahren, logarithmische Tafeln anzufertigen. In analoger Weise betrachte ich auch die Kreisbogen; denn obwohl diese Art von Zahlgrössen von den Logarithmen sehr wesentlich verschieden sind, so stehen sie andererseits mit denselben wieder in so engem Zusammenhange, dass die einen, wenn sie imaginär werden, in die andern übergehen. Nach einigen Wiederholungen aus der Trigonometrie, die Darstellung der Sinus und Cosinus vielfacher Bogen betreffend, drücke ich mittelst des Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens den Sinus und Cosinus eines sehr kleinen und gleichsam verschwindenden Bogens aus und komme gerade dadurch zu unendlichen Reihen. Da nämlich der Sinus eines verschwindenden Bogens gleich diesem Bogen, der Cosinus dagegen gleich dem Halbmesser des Kreises ist, so kann man hiernach jeden beliebigen Bogen ebenso wie seinen Sinus und Cosinus mittelst unendlicher Reihen darstellen. Auf diese Weise erhalte ich so mannigfaltige Ausdrücke in endlicher und unendlicher Form für diese Art von Grössen, dass man zur Erforschung ihrer eigentlichen Natur die Infinitesimalrechnung ferner nicht mehr nötig hat. Ebenso nun wie die Logarithmen ein eigentümliches Rechnungsverfahren erheischen, welches in der gesamten Analysis in ausgedehntester Weise zur Anwendung kommt, so habe ich auch für die Kreisfunctionen ein bestimmtes Rechnungsverfahren angegeben, mittelst dessen dieselben bei Rechnungen ebenso bequem wie die Logarithmen und selbst wie die algebraischen Grössen angewendet werden können. Welcher Vorteil daraus für die Erledigung der schwierigsten Untersuchungen erwächst, lassen nicht allein mehrere Capitel dieses Buches deutlich erkennen, sondern wir könnten aus der Analysis des Unendlichen noch sehr viele Beispiele dafür anführen, wenn dieselben nicht schon hinreichend bekannt wären und von Tag zu Tag immer zahlreicher würden. Ein vorzügliches Hülfsmittel gewährt diese Erfindung aber bei der Zerlegung der gebrochenen Functionen in reelle Factoren. Da dies in der Integralrechnung ein nicht zu umgehendes Geschäft ist, so habe ich mich darüber etwas ausführlicher ausgelassen. Sodann untersuche ich die aus der Entwicklung solcher Functionen entspringenden unendlichen Reihen, welche unter dem Namen der rekurrenten Reihen bekannt sind, genauer und finde dabei nicht nur ihre Summen, sondern auch die allgemeinen Glieder und andere bemerkenswerte Eigenschaften derselben. So wie nun hierzu die Zerlegung in Factoren die Veranlassung gab, zeige ich nun auch umgekehrt, wie man die Producte aus mehreren, ja aus unendlich vielen Factoren in unendliche Reihen entwickeln könne. Diese Untersuchung bahnt nicht nur den Weg zur Entdeckung unzählig vieler unendlicher Reihen, sondern man findet auch, da man auf diese Weise eine Reihe in ein unendliches Product verwandeln konnte, sehr bequeme Ausdrücke, um die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten auf die leichteste Weise numerisch zu berechnen. Ausserdem aber leite ich aus derselben Quelle die Lösung vieler, die Zerlegung der Zahlen in Teile betreffenden Aufgaben her, die ohne dieses Hülfsmittel wohl die Kräfte der Analysis übersteigen dürften.

Dieser überreiche Stoff hätte ausgereicht, um mehrere Bände damit anzufüllen; ich habe indessen Alles so kurz und bündig vorgetragen, dass zwar die eigentliche Grundlage desselben überall ganz klar hervortritt, dass aber auch dem Fleisse der Leser manches zur weiteren Ausführung überlassen bleibt, wodurch sie ihre Kräfte üben und das Gebiet der Analysis erweitern können. Im Uebrigen glaube ich sagen zu dürfen, dass dieses Buch nicht allein manches vollständig Neue enthält, sondern dass es auch die Quellen aufdeckt, aus denen man noch sehr viele merkwürdige Entdeckungen wird ableiten können.

Denselben Weg habe ich in dem zweiten Teile verfolgt, in welchem ich Alles, was man gewöhnlich zur höheren Geometrie rechnet, behandelt habe. Bevor ich jedoch von den Kegelschnitten, die sonst an dieser Stelle fast allein in Betracht gezogen werden, handle, gebe ich die Theorie der krummen Linien überhaupt, so dass man dieselben dann mit Vorteil bei der Erforschung der Natur irgend einer besonderen krummen Linie verwenden kann. Dazu brauche ich kein anderes Hülfsmittel, als die Gleichung, durch welche sich eine jede krumme Linie darstellen lässt, indem ich zeige, wie man aus dieser sowohl die Gestalt als die vorzüglichsten Eigenschaften derselben ableiten kann. Dies glaubte ich hauptsächlich an den Kegelschnitten erläutern zu müssen, da man dieselben früher entweder auf rein geometrischem Wege, oder, wenn analytisch, doch in sehr unvollkommener und wenig naturgemässer Weise behandelt hat. Aus der allgemeinen Gleichung für die Linien zweiter Ordnung entwickle ich zunächst deren allgemeine Eigenschaften und teile sie darauf mit Rücksicht darauf, ob sie ins Unendliche fortlaufende Zweige haben oder ganz im Endlichen liegen, in Klassen oder Arten ein. Im ersten Falle muss man wieder beachten, wie viele Zweige ins Unendliche gehen und von welcher Beschaffenheit die einzelnen Zweige sind, ob diese gerade Linien als Asymptoten haben oder nicht. Auf diese Weise erhalte ich die drei gewöhnlichen Arten der Kegelschnitte, nämlich die Ellipse, die ganz im Endlichen verläuft, die Hyperbel, welche vier ins Unendliche sich erstreckende und, zwei geraden Linien asymptotisch sich nähernde, Zweige besitzt, und die Parabel, die nur zwei ins Unendliche fortgehende Zweige, aber keine Asymptoten hat. In ähnlicher Weise untersuche ich auch die Kurven dritter Ordnung und teile dieselben nach Entwicklung ihrer allgemeinen Eigenschaften in sechzehn Arten ein, indem ich hierauf die von Newton aufgestellten 72 Arten sämtlich zurückführe. Den Weg, der hierzu führt, habe ich so deutlich beschrieben, dass man die Einteilung der Linien aller höheren Ordnungen in Arten sehr leicht wird vornehmen können. Ueberdies habe ich dies noch für die Linien der vierten Ordnung wirklich ausgeführt. Nach diesen auf die Ordnungen der Kurven bezüglichen Untersuchungen kehre ich zur Ermittlung noch anderer allgemeiner Beziehungen der Kurven zurück. Ich gebe also ein Verfahren an, um die Tangenten der Kurven, ihre Normalen, ja selbst die Krümmung, die man gewöhnlich nach dem Krümmungshalbmesser beurteilt, zu bestimmen. Obgleich dies heutzutage fast ausschliesslich mittelst Differentialrechnung geschieht, erläutere ich dies hier doch nur mit Hülfe der niederen Algebra, um dadurch den Uebergang von der Analysis des Endlichen zu der Analysis des Unendlichen zu erleichtern. Auch die Wendepunkte, die Spitzen, die Doppel- und vielfachen Punkte habe ich untersucht und den Weg angegeben, wie man dieses Alles aus den Gleichungen ohne alle Schwierigkeit finden kann. Indessen will ich nicht läugnen, dass sich diese Untersuchungen weit leichter mit Hülfe der Differentialrechnung führen lassen. Ferner berühre ich auch die Streitfrage der Spitzen zweiter Art und hoffe dieselbe so klargelegt zu haben, dass darüber kein Zweifel mehr bestehen kann. In einigen weiteren Capiteln zeige ich dann, wie man die krummen Linien aus gewissen gegebenen Eigenschaften bestimmen kann, und gebe zum Schluss die Lösung einiger Aufgaben, die sich auf die Teilung des Kreises beziehen. Dies ist Alles, was aus der Geometrie bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen gute Dienste leisten kann. Als Anhang habe ich aber noch aus der Stereometrie die Theorie der Körper und deren Oberflächen analytisch entwickelt und gezeigt, wie sich die Beschaffenheit einer jeden Fläche durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen ausdrücken lässt. Nachdem ich hierauf die Flächen ähnlich wie die Linien nach dem Grade ihrer Gleichungen in Ordnungen gebracht habe, beweise ich, dass die erste Ordnung nur allein die ebene Fläche enthält. Die Flächen der zweiten Ordnung aber teile ich mit Rücksicht darauf, ob sie ins Unendliche sich erstreckende Teile haben, in sechs Arten ein, und ebenso kann man auch die Einteilung der Flächen höherer Ordnungen vornehmen. Ferner betrachte ich auch die Durchschnitte zweier Flächen und zeige, wie dieselben, da sie im Allgemeinen Kurven sind, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sich durch Gleichungen darstellen lassen. Endlich bestimme ich noch die Lage der Berührungsebenen und der Normalen der Fläche.

Da Manches, was ich hier vorgetragen habe, schon von Andern behandelt worden ist, so muss ich um Entschuldigung bitten, wenn ich nicht überall diejenigen mit Anerkennung namhaft gemacht habe, die sich schon vorher mit demselben Gegenstande beschäftigt haben. Da es jedoch meine Absicht war, Alles möglichst kurz auseinanderzusetzen, so habe ich jenes unterlassen, um nicht durch eine geschichtliche Uebersicht über jedes Problem das vorliegende Werk ganz erheblich zu vergrössern. Ueberdies habe ich auch für die meisten Aufgaben, welche sich schon anderwärts finden, eine auf anderem Wege gefundene Lösung gegeben, so dass ich einen nicht geringen Teil davon für mich allein in Anspruch nehmen kann. Ich hoffe, dass nicht allein dies, sondern vor allem das Neue, das hier gegeben wird, manchem, der Gefallen an solchen Untersuchungen findet, nicht unerwünscht sein wird.

Inhalts-Verzeichnis.

Erster Teil.

Von den Functionen veränderlicher Zahlgrössen, ihrer Zerlegung in Factoren und Entwicklung in unendliche Reihen; ferner die Lehre von den Logarithmen, Kreisbogen und deren Sinus und Tangenten, und viele andere Gegenstände, welche für die Analysis des Unendlichen von Wichtigkeit sind.

1. Capitel.

Von den Functionen überhaupt.

§ 1.

Eine constante Zahlgrösse ist eine bestimmte Zahlgrösse, welche beständig denselben Wert behält.

Dergleichen Zahlgrössen sind die Zahlen jeglicher Art, da ja dieselben den ihnen einmal beigelegten Wert unverändert beibehalten. Zur Bezeichnung constanter Zahlgrössen bedient man sich der Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b, c u. s. w. Zwar pflegt man in der niederen Analysis, wo nur bestimmte Zahlgrössen in Betracht gezogen werden, mit den ersten Buchstaben des Alphabets die bekannten, mit den letzten aber die unbekannten Zahlgrössen zu bezeichnen; in der höheren Analysis jedoch wird nicht so sehr auf diese Unterscheidung geachtet, da es hier vorzugsweise auf ein solches Unterscheidungsmerkmal der Zahlgrössen ankommt, durch welches die einen als constant, die andern als veränderlich hingestellt werden.

§ 2.

Eine veränderliche Zahlgrösse ist eine unbestimmte oder eine allgemeine Zahlgrösse, welche alle bestimmten Werte ohne Ausnahme in sich begreift.

Da sich nun jeder bestimmte Wert durch eine Zahl ausdrücken lässt, so begreift eine veränderliche Zahlgrösse die Gesamtheit aller Zahlen in sich. Auf dieselbe Art nämlich, wie man aus den Begriffen der Einzelwesen die Begriffe der Art und des Geschlechts ableitet, ist auch die veränderliche Zahlgrösse ein Geschlecht, unter welchem alle bestimmten Zahlgrössen begriffen sind. Derartige veränderliche Zahlgrössen bezeichnet man gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x u. s. w.

§ 3.

Eine veränderliche Zahlgrösse wird zu einer bestimmten, wenn ihr irgend ein bestimmter Wert beigelegt wird.

Es kann daher eine veränderliche Zahlgrösse auf unzählig viele Arten zu einer bestimmten werden, da man für sie jede beliebige Zahl setzen kann. Die Bedeutung einer veränderlichen Zahlgrösse ist noch nicht erschöpft, so lange nicht säimtliche bestimmten Werte für sie gesetzt worden sind. Eine veränderliche Zahlgrösse begreift daher alle nur denkbaren Zahlen in sich, die positiven sowohl wie die negativen, die ganzen sowie die gebrochenen, die rationalen sowie die irrationalen und die transcendenten. Ja auch die Null und die imaginären Zahlen sind davon nicht ausgeschlossen.

§ 4.

Eine **Function** einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein **analytischer Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrössen zusammengesetzt ist.

Jeder analytische Ausdruck also, welcher ausser der veränderlichen Zahlgrösse z nur noch constante Zahlgrössen enthält, ist eine Function von z. So sind z. B. die Ausdrücke

$$a+3z;\quad az-4z^2;\quad az+b\sqrt{a^2-4z^2};\quad c^z \text{ u. s. w.}$$

Functionen von z.

§ 5.

Eine Function einer veränderlichen Zahlgrösse ist daher selbst wieder eine veränderliche Zahlgrösse.

Da man nämlich für die veränderliche Zahlgrösse jeden bestimmten Wert setzen kann, so wird auch die Function unzählig viele bestimmte Werte annehmen; ja es ist, da die veränderliche Zahlgrösse auch die imaginären Werte einschliesst, kein bestimmter Wert denkbar, den die Function nicht sollte annehmen können. So kann zwar die Function $\sqrt{9-z^2}$, wenn man für z nur reelle Zahlen setzt, niemals einen grösseren Wert als 3 erhalten; legt man aber z auch imaginäre Werte von der Art bei, wie $5\sqrt{-1}$ einer ist, so lässt sich kein bestimmter Wert angeben, den man nicht aus der Formel $\sqrt{9-z^2}$ erhalten könnte. Man kommt jedoch zuweilen auch auf Functionen, die nur scheinbar solche sind, während sie, wie auch die veränderliche Zahlgrösse sich ändern möge, doch stets denselben Wert behalten. So sehen zwar die Ausdrücke z^0, 1^z, $\frac{a^2-az}{a-z}$ scheinbar wie Functionen aus; sie sind jedoch in Wirklichkeit constante Zahlgrössen.

§ 6.

Der **Hauptunterschied der Functionen** beruht auf der Art und Weise, wie dieselben aus der veränderlichen und den constanten Zahlgrössen gebildet sind.

Er hängt also von den Operationen ab, durch welche die Zahlgrössen in irgend welcher Anordnung mit einander verbunden werden können; solche Operationen sind die Addition und Subtraction, die Multiplication und Division, die Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln; auch gehört hierher die Auflösung der Gleichungen. Ausser diesen sogenannten algebraischen Operationen giebt es noch mehrere, transcendente genannte Operationen, wie die Bildung von Exponential- und logarithmischen Grössen, und ausserdem noch unzählig viele, auf welche die Integralrechnung führt.

Man kann sich vor der Hand gewisse besondere Arten von Functionen merken, wie z. B. die Vielfachen von z: $2z$, $3z$, $\frac{3}{5}z$, az u. s. w. und die Potenzen von z, wie z^2, z^3, $z^{\frac{1}{2}}$, z^{-1} u. s. w. Ebenso wie diese aus einer einzigen Operation hergeleiteten Ausdrücke, so werden auch alle andern, welche aus irgend welchen Operationen entspringen, mit dem Namen von Functionen belegt.

§ 7.

Die Functionen werden **eingeteilt** in **algebraische** und **transcendente**. Unter jenen versteht man die, in welchen nur algebraische, unter diesen die, in welchen auch transcendente Operationen vorkommen.

Es sind daher die Vielfachen und die Potenzen von z, sowie überhaupt alle durch die vorher genannten algebraischen Operationen gebildeten Ausdrücke, wie z. B.

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}$$

algebraische Functionen. Häufig können sogar die algebraischen Functionen nicht einmal entwickelt dargestellt werden, wie z. B. die Function Z von z, wenn sie definirt wird durch die Gleichung:

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1.$$

Obgleich man nämlich diese Gleichung nicht auflösen kann, so ist doch sicher Z irgend einem aus der Veränderlichen z und den Constanten zusammengesetzten Ausdrucke gleich und deshalb Z eine gewisse Function von z. Was aber die transcendenten Functionen angeht, so ist zu beachten, dass sie nur dann wirklich transcendent sind, wenn eine transcendente Operation nicht nur darin vorkommt, sondern auch die veränderliche Zahlgrösse selbst betrifft. Erstrecken sich nämlich die transcendenten Operationen nur auf die constanten Zahlgrössen, so ist die Function trotzdem als algebraische zu betrachten. Bedeutet z. B. c den Umfang eines Kreises mit dem Halbmesser 1, so ist c allerdings eine transcendente Zahlgrösse, nichtsdestoweniger sind die Ausdrücke $c+z$, cz^2, $4z^c$ u. s. w. algebraische Functionen von z. Denn der Umstand, dass Einige in Zweifel darüber sind, ob man einen solchen Ausdruck z^c mit Recht den algebraischen Functionen zuzählen dürfe oder nicht, ist von keiner grossen Bedeutung; wollten doch sogar Einige die Potenzen von z mit irrationalen Exponenten wie $z^{\sqrt{2}}$ lieber interscendente als algebraische Functionen nennen.

§ 8.

Die **algebraischen** Functionen teilt man wieder ein in **rationale** und **irrationale**; jenes sind solche, in welchen die Veränderliche unter keinem Wurzelzeichen vorkommt, dieses aber solche, in welchen die Wurzelzeichen sich auch über die veränderliche Zahlgrösse erstrecken.

In den rationalen Functionen kommen also weiter keine Operationen vor als: Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Erhebung zu Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind. Es sind also z. B.

$$a+z,\quad a-z,\quad az,\quad \frac{a^2+z^2}{a+z},\quad az^3-bz^5 \text{ u. s. w.}$$

rationale, hingegen

$$\sqrt{z},\quad a+\sqrt{a^2-z^2},\quad \sqrt[3]{a-2z+z^2},\quad \frac{a^2-z\sqrt{a^2+z^2}}{a+z}$$

irrationale Functionen von z.

Die **irrationalen** Functionen scheidet man wieder passend in **entwickelte** (explicite) und **unentwickelte** (implicite).

Entwickelt heisst eine irrationale Function, wenn sie vermittelst der Wurzelzeichen abgesondert dargestellt ist, wie in den oben angeführten Beispielen. Die unentwickelten irrationalen Functionen aber werden durch algebraische Gleichungen definirt. So ist z. B. Z eine unentwickelte irrationale Function von z, wenn sie durch die Gleichung $Z^7 = azZ^2 - bz^5$ bestimmt wird; denn es ist selbst unter Zulassung von Wurzelzeichen nicht möglich, einen entwickelten Ausdruck für Z zu finden, da die gemeine Algebra noch nicht bis zu diesem Grade der Vollkommenheit gebracht ist.

§ 9.

Die **rationalen** Functionen zerfallen ihrerseits wieder in **ganze** und **gebrochene**.

In jenen kommen weder Potenzen von z mit negativen Exponenten vor, noch enthalten ihre Ausdrücke Brüche, in deren Nennern die veränderliche Zahlgrösse z auftritt. Hiernach werden gebrochene Functionen solche sein, in denen z enthaltende Nenner oder Potenzen von z mit negativen Exponenten vorkommen. Die allgemeine Form der ganzen Functionen ist demnach:

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\cdots,$$

denn es lässt sich keine ganze Function von z denken, die nicht in diesem Ausdrucke enthalten wäre. Alle gebrochenen Functionen dagegen sind, da man stets mehrere Brüche in einen zusammenziehen kann, in folgender Form enthalten:

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\cdots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+\cdots}.$$

Dabei beachte man, dass die constanten Zahlgrössen a, b, c, d u. s. w. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w., mögen sie nun positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational, oder auch transcendent sein, die Natur der Function nicht ändern.

§ 10.

Demnächst ist besonders die Einteilung der Functionen in **eindeutige** *(uniformes)* und **mehrdeutige** *(multiformes)* zu merken.

Eine eindeutige Function ist eine solche, welche für jeden bestimmten Wert der veränderlichen Zahlgrösse z ebenfalls nur einen einzigen bestimmten Wert annimmt. Eine mehrdeutige Function dagegen ist eine solche, welche für jeden bestimmten Wert der Veränderlichen z mehrere bestimmte Werte ergiebt. Die rationalen ganzen sowohl wie gebrochenen Functionen sind daher eindeutige Functionen, da sie für jeden beliebigen Wert der Veränderlichen nur einen einzigen bestimmten Wert geben. Die irrationalen Functionen sind dagegen sämtlich mehrdeutig, weil die Wurzelzeichen mehrdeutig sind und mehrere Werte unter sich begreifen. Auch unter den transcendenten Functionen giebt es eindeutige und mehrdeutige, ja sogar unendlichvieldeutige, wie den Kreisbogen, der zum Sinus z gehört; denn es giebt unzählig viele Kreisbogen, die alle denselben Sinus haben. Zur Bezeichnung einzelner eindeutiger Functionen werden wir uns der Buchstaben P, Q, R, S, T u. s. w. bedienen.

§ 11.

Eine **zweideutige** Function von z ist eine solche Function, welche für jeden bestimmten Wert von z zwei Werte giebt.

Derartige Functionen sind die Quadratwurzeln wie $\sqrt{2z+z^2}$; denn für jeden beliebigen Wert von z hat der Ausdruck $\sqrt{2z+z^2}$ zwei Werte, einen positiven und einen negativen. Ueberhaupt aber wird Z eine zweideutige Function von z, wenn sie durch die quadratische Gleichung:

$$Z^2 - PZ + Q = 0,$$

in welcher P, Q eindeutige Functionen von z sind, bestimmt wird. Es ergiebt sich nämlich daraus:

$$Z = \tfrac{1}{2} P \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} P^2 - Q},$$

so dass also jedem Werte von z zwei bestimmte Werte von Z entsprechen. Diese Werte sind entweder beide reell oder beide imaginär, und ihre Summe ist, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, gleich P, ihr Product gleich Q.

§ 12.

Eine **dreideutige** Function von z ist eine solche, welche für eden Wert von z drei bestimmte Werte giebt.

Derartige Functionen entspringen aus der Auflösung der kubischen Gleichungen. Denn sind P, Q, R eindeutige Functionen und ist:

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0,$$

so ist Z eine dreideutige Function von z, weil sie für jeden bestimmten Wert von z drei Werte erhält. Diese drei Werte von Z sind entweder sämtlich reell, oder einer von ihnen ist reell, die beiden andern aber imaginär, und es ist bekannt, dass ihre Summe stets gleich P, die Summe der Producte aus je zweien von ihnen gleich Q und das Product aller drei gleich R ist.

§ 13.

Eine **vierdeutige** Function von z ist eine solche, welche für jeden beliebigen Wert von z vier bestimmte Werte giebt.

Derartige Functionen entspringen aus der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Bedeuten nämlich P, Q, R, S eindeutige Functionen von z und ist:

$$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0,$$

so wird Z eine vierdeutige Function von z, weil jedem Werte von z vier Werte von Z entsprechen. Diese vier Werte sind entweder sämtlich reell, oder zwei von ihnen sind reell und zwei imaginär, oder es sind alle vier imaginär. Ferner ist ihre Summe stets gleich P, die Summe der Producte aus je zweien gleich Q, die Summe der Producte aus je dreien gleich R und das Product aller gleich S. — In ähnlicher Weise verhält es sich mit den fünfdeutigen und den übrigen mehrdeutigen Functionen.

§ 14.

Es ist somit Z eine **n-deutige** Function von z, wenn sie für jeden beliebigen Wert von z soviel Werte giebt, als die Zahl n Einheiten enthält, wenn sie also bestimmt wird durch die Gleichung:

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \cdots = 0.$$

Dabei muss aber n eine ganze Zahl und daher die Gleichung für Z auf die rationale Form gebracht sein, wenn man entscheiden will, eine wievieldeutige Function Z von z ist. Der Exponent der höchsten Potenz von Z giebt alsdann die gesuchte Anzahl der Werte von Z an, welche zu einem bestimmten Werte von z gehören. Ferner müssen P, Q, R, S u. s. w. eindeutige Functionen von z sein; denn wäre irgend eine derselben bereits eine mehrdeutige Function, so würde die Function Z weit mehr zu demselben Werte von z gehörige Werte geben, als die Zahl n angiebt. Finden sich unter den verschiedenen Werten von Z einige imaginäre, so ist deren Anzahl stets gerade, so dass also, wenn n eine ungerade Zahl ist, stets mindestens ein Wert von Z reell ist; dagegen kann möglicherweise gar kein Wert von Z reell sein, wenn n eine gerade Zahl ist.

§ 15.

Wenn Z eine solche mehrdeutige Function von z ist, dass sie stets nur einen einzigen reellen Wert ergiebt, dann ist Z gewissermassen eine eindeutige Function und kann auch meistens als eine solche gebraucht werden.

Derartige Functionen sind z. B., wofern P eine eindeutige Function von z ist, $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$ u. s. w., weil sie stets nur einen einzigen reellen Wert geben, während die andern alle imaginär sind. Daher kann man den Ausdruck $P^{\frac{m}{n}}$ den eindeutigen Functionen zuzählen, sobald n eine ungerade Zahl ist, mag nun m gerade oder ungerade sein. Ist aber n eine gerade Zahl, so hat $P^{\frac{m}{n}}$ entweder gar keinen oder zwei reelle Werte, und man kann somit den Ausdruck $P^{\frac{m}{n}}$, sobald n eine gerade Zahl und der Bruch $\frac{m}{n}$ durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, mit demselben Rechte zu den zweideutigen Functionen rechnen.

§ 16.

Ist y irgend eine Function von z, so ist auch umgekehrt z eine Function von y.

Da nämlich y Function von z ist, so giebt es, mag nun y ein- oder mehrdeutig sein, eine Gleichung, vermittelst welcher y durch z und durch constante Zahlgrössen bestimmt wird. Aus derselben Gleichung kann man aber auch z durch y und die constanten Zahlgrössen ausdrücken; es wird also z, da y eine veränderliche Zahlgrösse ist, gleich einem Ausdruck, welcher y und die constanten Zahlgrössen enthält, demnach eine Function von y ist. Darnach lässt sich auch beurteilen, eine wievieldeutige Function z von y ist; es kann nämlich z eine mehrdeutige Function von y werden, wenn auch y eine eindeutige Function von z war. Besteht z. B. zwischen y und z die Gleichung: $y^3 = ayz - bz^2$, so ist y eine dreideutige Function von z, dagegen z nur eine zweideutige Function von y.

§ 17.

Sind y und x Functionen von z, so ist auch y eine Function von x und umgekehrt x eine Function von y.

Denn da y eine Function von z ist, so ist auch z eine Function von y und ebenso z eine Function von x; folglich ist eine Function von y gleich einer Function von x. Da nun aus dieser Gleichung y durch x, oder umgekehrt x durch y bestimmt werden kann, so ist klar, dass y eine Function von x, oder x eine Function von y ist. Oft ist man freilich wegen der noch unvollkommenen Ausbildung der Algebra nicht im Stande, diese Functionen entwickelt darzustellen; indessen leuchtet doch zur Genüge ein, dass eine solche Umkehrung des Abhängigkeitsverhältnisses stattfindet, gerade wie wenn sämtliche Gleichungen aufgelöst werden könnten. Uebrigens lehrt die Algebra, wie man aus zwei Gleichungen, von denen die eine y und z, die andere x und z enthält, durch Elimination von z eine andere Gleichung zwischen x und y ableiten kann.

§ 18.

Endlich sind noch einige besondere Arten von Functionen zu merken. So heisst eine Function von z **gerade**, wenn sie denselben Wert giebt, mag man für z den bestimmten Wert $+k$ oder $-k$ setzen.

Eine derartige Function ist z^2, denn sie giebt sowohl für $z = +k$ als für $z = -k$ den bestimmten Wert $+k^2$. Ebenso sind die Potenzen z^4, z^6, z^8 u. s. w. und überhaupt alle Potenzen z^m gerade Functionen, wenn m eine gerade, gleichviel ob positive oder negative Zahl ist. Und da $z^{\frac{m}{n}}$ auch zu den eindeutigen Functionen gerechnet werden kann, wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist offenbar auch $z^{\frac{m}{n}}$ eine gerade Function von z, wenn m gerade und n ungerade ist. Es werden daher Ausdrücke, die aus jenen Potenzen irgendwie zusammengesetzt sind, gerade Functionen von z darstellen, wie z. B. die Ausdrücke:

$$Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \cdots$$
$$Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \cdots}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \cdots},$$

oder auch:

$$Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{4}{5}} + dz^{\frac{6}{7}} + \cdots$$
$$Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \cdots$$
$$Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}.$$

Da diese Ausdrücke sämtlich eindeutige Functionen von z sind, so kann man sie auch gerade eindeutige Functionen von z nennen.

§ 19.

Eine **gerade mehrdeutige** Function von z ist eine solche, welche zwar für jeden Wert von z mehrere bestimmten Werte, aber doch dieselben Werte giebt, mag man $z = +k$ oder $z = -k$ setzen.

Es sei Z eine solche mehrdeutige gerade Function von z. Da eine mehrdeutige Function durch eine Gleichung zwischen Z und z definirt wird, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von Z gerade die Zahl ist, welche angiebt, wieviel verschiedene Werte Z unter sich begreift, so ist Z eine zweideutige gerade Function von z, wenn $Z^2 = az^4 Z + bz^2$, eine dreideutige, wenn $Z^3 - az^2 Z^2 + bz^4 Z - cz^8 = 0$ ist. Bezeichnen überhaupt P, Q, R, S u. s. w. eindeutige gerade Functionen von z, so ist Z eine zweideutige gerade Function, wenn $Z^2 - PZ + Q = 0$, eine dreideutige, wenn $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$ ist u. s. f.

§ 20.

Es ist also jede gerade eindeutige sowohl wie mehrdeutige Function von z ein Ausdruck, welcher aus der Veränderlichen z und constanten Zahlgrössen in der Art zusammengesetzt ist, dass die Exponenten der Potenzen von z gerade Zahlen sind.

Ausser den eindeutigen geraden Functionen, wofür bereits oben Beispiele angeführt sind, gehören also hierher Ausdrücke wie

$$az^2 + \sqrt[3]{a^6 z^4 - bz^2} \text{ oder } az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{z^2 + \sqrt{a^4 - z^4}} \text{ u. s. w.}$$

Es können folglich die geraden Functionen auch so definirt werden, dass man sagt, sie seien Functionen von z^2.

Setzt man nämlich in irgend einer Function Z von y an Stelle von yz^2, so wird dieselbe eine solche, in welcher die Exponenten der Potenzen von z sämtlich gerade sind. Jedoch muss man diejenigen Fälle ausnehmen, wo in Z Ausdrücke wie $\sqrt{y}$ oder andere Formen auftreten, die dadurch, dass man $y = z^2$ setzt, die Wurzelzeichen verlieren. Denn obwohl $y + \sqrt{ay}$ eine Function von y ist, so wird dieser Ausdruck doch, nachdem $y = z^2$ gesetzt ist, keine gerade Function von z, weil alsdann $y + \sqrt{ay} = z^2 + az$ ist. Nach Ausschluss dieser Fälle ist indessen die zuletzt gegebene Erklärung der geraden Functionen richtig und sehr bequem, wenn man derartige Functionen bilden will.

§ 21.

Eine **ungerade Function** von z ist eine solche, welche den **entgegengesetzten Wert** annimmt, wenn man $-z$ an Stelle von z setzt.

Derartige Functionen von z sind demnach alle Potenzen von z, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, wie z^1, z^3, z^5, z^7 u. s. w., ferner

z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} u. s. w. Ebenso wird $z^{\frac{m}{n}}$ eine ungerade Function sein, wenn die Zahlen m und n beide ungerade sind. Ueberhaupt ist jeder aus diesen Potenzen gebildete Ausdruck eine ungerade Function, z. B. $az + bz^3$, $az + bz^{-1}$, desgleichen $z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{5}{3}} + bz^{-\frac{1}{5}}$ u. s. w. Die Art und die Bildung solcher Functionen wird man leicht aus dem entnehmen, was über die geraden Functionen gesagt ist.

§ 22.

Multiplicirt man eine gerade Function von z mit z oder irgend einer ungeraden Function von z, so ist das Product eine ungerade Function.

Ist P eine gerade Function von z, so ändert sie ihren Wert nicht, wenn man darin $-z$ an Stelle von z setzt. Tut man also dasselbe in dem Producte Pz, so geht es über in $-Pz$ und ist folglich eine ungerade Function. Ist ferner P eine gerade, Q eine ungerade Function von z, so behält nach der Erklärung der geraden und ungeraden Functionen P denselben Wert bei, wenn man darin $-z$ für z setzt, während Q den entgegengesetzten Wert annimmt, also in $-Q$ übergeht. Es geht demnach auch das Product PQ dadurch, dass man $-z$ für z setzt, in $-PQ$ über und ist folglich eine ungerade Function von z. So ist $a + \sqrt{a^2 + z^2}$ eine gerade, z^3 aber eine ungerade Function, demnach das Product $az^3 + z^3\sqrt{a^2 + z^2}$ ebenfalls eine ungerade Function. Dasselbe gilt von dem Producte $z \cdot \frac{a + bz^2}{\alpha + \beta z^2} = \frac{az + bz^3}{\alpha z + \beta z^2}$. Hieraus erhellt zu gleicher Zeit, dass auch die Quotienten $\frac{P}{Q}$ und $\frac{Q}{P}$ ungerade Functionen von z sein werden, wenn von den beiden Functionen P, Q die eine eine gerade, die andere eine ungerade Function von z ist.

§ 23.

Das **Product** *oder der* **Quotient zweier ungeraden** *Functionen ist eine* **gerade** *Function.*

Sind Q und S ungerade Functionen von z, so gehen dieselben, wenn man $-z$ für z setzt, über in $-Q$ und $-S$; dagegen behält das Product QS sowohl wie der Quotient $\frac{Q}{S}$ denselben Wert bei; sie sind also beide gerade Functionen von z. Hiernach ist offenbar das *Quadrat* einer *ungeraden* Function eine *gerade*, der *Kubus* eine *ungerade*, die *vierte Potenz* wieder eine *gerade* Function u. s. w.

§ 24.

Ist y eine ungerade Function von z, so ist auch umgekehrt z eine ungerade Function von y.

Denn da y eine ungerade Function von z ist, so geht y dadurch, dass man $-z$ für z setzt, in $-y$ über. Wird also z durch y bestimmt, so muss notwendig, nachdem $-y$ an Stelle von y gesetzt ist, auch z den entgegengesetzten Wert annehmen, also eine ungerade Function von z sein. Ist z. B. $y = z^3$, also y eine ungerade Function von z, so ergiebt sich auch z aus der Gleichung $z^3 = y$ oder $z = y^{\frac{1}{3}}$ als ungerade Function von y; und da $y = az + bz^3$ eine ungerade Function von z ist, so ist umgekehrt der aus der Auflösung der Gleichung $bz^3 + az = y$ für z sich ergebende Wert eine ungerade Function von y.

§ 25.

Wenn die Function y durch eine Gleichung bestimmt wird, in welcher die Exponenten der Potenzen von y und z) in jedem einzelnen Gliede zusammen entweder überall eine gerade oder überall eine ungerade Zahl als Summe ergeben, so ist y eine ungerade Function von z.*

Denn setzt man in einer solchen Gleichung überall zu gleicher Zeit $-y$ und $-z$ an die Stelle von y und z, so bleiben sämtliche Glieder der Gleichung entweder ungeändert, oder sie kehren ihr Vorzeichen um; die Gleichung selbst aber bleibt in beiden Fällen dieselbe. Daraus erhellt, dass $-y$ auf dieselbe Art durch $-z$ wie $+y$ durch $+z$ bestimmt wird. Es muss daher dadurch, dass man $-z$ für z setzt, der Wert von y in den entgegengesetzten übergehen, und somit y eine ungerade Function von z sein. So ergiebt sich z. B. y aus jeder der beiden Gleichungen $y^2 = ayz + bz^2 + c$ und $y^3 + ay^2z = byz^2 + cy + dz$ als eine ungerade Function von z.

§ 26.

Wenn Z eine Function von z und Y eine Function von y ist und wenn Y auf eben die Art durch y und constante Zahlgrössen, wie Z durch z und constante Zahlgrössen bestimmt wird, so nennt man die Functionen Y und Z **ähnliche** *Functionen von y und z.*

So sind z. B. Z und Y, wenn $Z = a + bz + cz^2$ und $Y = a + by + cy^2$, oder um auch mehrdeutige Functionen zu berücksichtigen, wenn $Z^3 = az^2Z + b$ und $Y^3 = ay^2Y + b$ ist, ähnliche Functionen von z und y. Wenn demnach Y und Z ähnliche Functionen von y und z sind, so geht die Function Z in die Function Y über, sobald man darin y an Stelle von z schreibt. Gewöhnlich drückt man diese Aehnlichkeit so aus, dass man sagt, Y sei eine eben solche Function von y wie Z von z, und zwar wendet man diese Ausdrucksweise an, gleichviel ob die Veränderlichen y und z

* Euler gebraucht hier das erst im § 83 erklärte Wort „Dimension".
Anm. d. Uebers.

von einander abhängen oder nicht. So ist $a(y+n)+b(y+n)^3$ eben die Function von $y+n$, wie $ay+by^3$ von y, und $\frac{a+bz+cz^2}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ eben die Function von $\frac{1}{z}$, wie $\frac{az^2+bz+c}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}$ von z; im ersten Falle ist $z=y+n$, im zweiten $y=\frac{1}{z}$. Hieraus erhellt deutlich, was es mit der Aehnlichkeit der Functionen, von welcher in der ganzen höheren Analysis ein sehr häufiger Gebrauch gemacht wird, für eine Bewandtnis hat. Uebrigens kann das bisher über die Natur der Functionen einer Veränderlichen Gesagte genügen, da eine ausführlichere Auseinandersetzung bei der folgenden Anwendung gegeben wird.

2. Capitel.

Von der Umformung der Functionen.

§ 27.

Die Functionen können auf andere Formen gebracht werden, und zwar entweder unter Beibehaltung derselben veränderlichen Zahlgrösse oder durch Einführung einer anderen Veränderlichen an Stelle der ersten.

Behält man dieselbe Veränderliche bei, so kann sich die Function eigentlich nicht ändern. Aber wie in der Algebra bekanntlich eine und dieselbe Zahlgrösse in mehreren verschiedenen Formen dargestellt werden kann, so besteht auch hier jede Umformung einer Function darin, dass man sie auf verschiedene Arten ausdrückt. Beispiele solcher Umformungen sind es, wenn man an Stelle der Ausdrücke:

$$2-3z+z^2;\; a^3+3a^2z+3az^2+z^3;\; \frac{2a^2}{a^2-z^2};\; \frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}$$

bezüglich setzt:

$$(1-z)(2-z);\; (a+z)^3;\; \frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z};\; \sqrt{1+z^2}+z;$$

denn obwohl die ersteren Ausdrücke der Form nach von den letzteren verschieden sind, so bedeuten je zwei entsprechende in Wirklichkeit doch ein und dasselbe. Häufig ist jedoch von mehreren gleichbedeutenden Formen die eine für den gerade vorliegenden Zweck geeigneter als die andere, und man muss daher jedesmal die passendste Form auswählen.

Die andere Art der Umformung, bei welcher an Stelle von z eine andere mit dieser in einer gegebenen Beziehung stehende Veränderliche y eingeführt wird, heisst die Umformung durch Substitution. Sie dient dazu, eine gegebene Function kürzer und bequemer darzustellen. So geht die Function $a^4-4a^3z+6a^2z^2-4az^3+z^4$ dadurch, dass man y an die Stelle von $a-z$ setzt, in die viel einfachere Function y^4 von y über, und die irrationale Function $\sqrt{a^2+z^2}$ erhält durch die Substitution $z=\frac{a^2-y^2}{2y}$

die rationale Form $\frac{a^2+y^2}{2y}$. Die genauere Untersuchung dieser Art von Umformung verschieben wir auf das folgende Capitel und behandeln zunächst diejenige Umformung, bei welcher keine Substitution stattfindet.

§ 28.

Eine **ganze Function** von z wird häufig sehr zweckmässig **in ihre Factoren zerlegt,** also auf die Form eines Products gebracht.

Ist eine ganze Function in ihre Factoren zerlegt, so lässt sich ihre wahre Natur viel leichter erkennen, da man sofort weiss, in welchen Fällen sie verschwindet. Wird z. B. die Function $6-7z+z^3$ in das Product $(1-z)(2-z)(3+z)$ verwandelt, so sieht man sofort, dass sie für die drei Werte $z=1$, $z=2$, $z=-3$ gleich 0 wird, was aus der ursprünglichen Form nicht so leicht ersichtlich ist. Solche Factoren, in denen die Veränderliche z nur in der ersten Potenz vorkommt, werden zum Unterschiede von den zusammengesetzten Factoren, welche das Quadrat, den Kubus oder eine höhere Potenz von z enthalten, einfache Factoren genannt. Es ist daher $f+gz$ die allgemeine Form der einfachen, $f+gz+hz^2$ die der zweifachen, $f+gz+hz^2+iz^3$ die der dreifachen Factoren u. s. w., woraus erhellt, dass jeder zweifache Factor zwei einfache, jeder dreifache drei einfache Factoren u. s. w. in sich fasst. Eine ganze Function von z, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von z gleich n ist, wird also n einfache Factoren enthalten. Hiernach wird man auch die Anzahl der Factoren in dem Falle ermitteln können, wo die Factoren zum Teil zweifache, dreifache u. s. w. sind.

§ 29.

Die **einfachen** Factoren irgend einer ganzen Function Z von z findet man, indem man die Function Z gleich 0 setzt und die Wurzeln der Gleichung $Z=0$ aufsucht. Aus jedem dieser Wurzelwerte entspringt ein einfacher Factor der Function Z.

Ist nämlich $z=f$ irgend eine Wurzel der Gleichung $Z=0$, so ist $z-f$ ein Teiler und somit ein Factor der Function Z. Hat man also auf diese Weise $z=f$, $z=g$, $z=h$ u. s. w. als die Wurzeln der Gleichung $Z=0$ gefunden, so kann man Z in seine Factoren zerlegen und in das Product

$$Z=(z-f)(z-g)(z-h)\ldots$$

verwandeln. Dabei ist jedoch zu beachten, dass, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von z nicht gleich $+1$ ist, das Product $(z-f)(z-g)\ldots$ noch mit diesem Coefficienten multiplicirt werden muss, so dass also, wenn

$$Z=Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2}+\ldots$$

ist,

$$Z=A(z-f)(z-g)(z-h)\ldots$$

wird. Ist hingegen

$$Z=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots,$$

und sind f, g, h, i u. s. w. die Wurzeln der Gleichung $Z=0$, so wird:

$$Z=A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\ldots.$$

Umgekehrt ist ersichtlich, dass, wenn $z-f$ oder $1-\frac{z}{f}$ ein Factor der Function Z ist, die Function den Wert 0 erhalten muss, wenn man f an Stelle von z setzt. Denn für $z=f$ muss der eine Factor $z-f$ oder $1-\frac{z}{f}$ und somit die Function Z selbst verschwinden.

§ 30.

Die **einfachen** Factoren einer Function sind demnach **teils reell, teils imaginär,** und zwar ist die **Anzahl der letzteren,** falls solche überhaupt vorhanden sind, **stets eine gerade Zahl.**

Denn da die einfachen Factoren aus den Wurzeln der Gleichung $Z=0$ entstehen, so werden reelle Wurzeln reelle Factoren, imaginäre Wurzeln imaginäre Factoren geben, und da in jeder Gleichung die Anzahl der imaginären Wurzeln stets eine gerade Zahl ist, so wird die Function Z entweder gar keine, oder zwei, oder vier, oder sechs u. s. w. imaginäre Factoren haben. Wenn nun die Function Z nur zwei imaginäre Factoren besitzt, so wird deren Product reell sein und somit einen reellen zweifachen Factor darstellen. Denn ist P das Product aus allen einfachen reellen Factoren, so ist das Product der beiden imaginären gleich $\frac{Z}{P}$ und somit reell. Ebenso wird in dem Falle, wo die Function Z vier oder sechs oder acht u. s. w. imaginäre Factoren hat, das Product derselben immer reell, nämlich gleich dem Quotienten sein, welchen man erhält, wenn man die Function Z durch das Product aller reellen Factoren dividirt.

§ 31.

Ist Q ein **reelles** Product aus **vier einfachen imaginären** Factoren, so kann man dasselbe stets in **zwei zweifache reelle** Factoren zerlegen.

Es hat nämlich Q die Form:

$$z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D.$$

Wäre es nun nicht möglich, diese Function in zwei zweifache reelle Factoren zu zerlegen, so müsste sie in zwei zweifache imaginäre Factoren von der Form:

$$z^2-2(p+q\sqrt{-1})z+r+s\sqrt{-1}$$

und

$$z^2-2(p-q\sqrt{-1})z+r-s\sqrt{-1}$$

zerlegt werden können; denn es sind keine andern imaginären Formen denkbar, deren Product reell und gleich $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ wäre. Aus jenen zweifachen imaginären Factoren entstehen aber die folgenden vier einfachen imaginären Factoren der Function Q selbst:

$$z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}}$$

$$z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}}$$

$$z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}}$$

$$z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$t = p^2 - q^2 - r \text{ und } u = 2pq - s,$$

und multiplicirt man den ersten und dritten dieser vier Factoren, so wird deren Product gleich:

$$z^2 - \left(2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}}\right) z + p^2 + q^2 - p\sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}}$$
$$+ q\sqrt{-2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}} + \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Dasselbe ist also reell. Ebenso ist das Product aus dem zweiten und vierten Factor reell, nämlich gleich:

$$z^2 - \left(2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}}\right) z + p^2 + q^2 + p\sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}}$$
$$- q\sqrt{-2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}} + \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Es ist daher in der Tat das gegebene Product Q entgegen der Annahme in zwei zweifache reelle Factoren zerlegt.

§ 32.

Wenn eine ganze Function Z von z **beliebig viele einfache imaginäre** Factoren hat, so können **immer zwei und zwei** so mit einander verbunden werden, dass ihr **Product reell** ist.

Die Anzahl der imaginären Factoren, welche stets eine gerade Zahl ist, sei mit $2n$ bezeichnet. Alsdann ist (nach § 30) jedenfalls das Product aller imaginären Factoren reell. Sind daher nur zwei imaginäre Factoren vorhanden, so ist deren Product reell. Bei vier imaginären Factoren kann man, wie wir (im vorigen Paragraphen) gesehen haben, das Product derselben ebenfalls in zwei zweifache reelle Factoren von der Form $fz^2 + gz + h$ zerlegen. Obwohl sich nun diese Beweisform nicht auf höhere Potenzen übertragen lässt, so steht doch ausser allem Zweifel, dass dieselbe Eigenschaft auch für beliebig viele imaginäre Factoren gilt, so dass stets an Stelle der $2n$ einfachen imaginären Factoren n zweifache reelle Factoren gesetzt, und daher alle ganzen Functionen von z in reelle teils einfache, teils zweifache Factoren zerlegt werden können. Allerdings ist der Beweis dieses Satzes hierdurch noch nicht mit aller Strenge geführt; jedoch wird die Wahrheit desselben im Folgenden mehr und mehr erhärtet werden, indem wir Functionen wie $a + bz^n$, $a + bz^n + cz^{2n}$, $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$ u. s. w. wirklich in solche zweifachen reellen Factoren zerlegen werden.

§ 33.

Wenn die ganze Function Z für $z = a$ den Wert A, für $z = b$ den Wert B annimmt, so kann sie für Werte von z, die zwischen a und b liegen, jeden beliebigen zwischen A und B gelegenen Wert erhalten.

Da nämlich Z eine eindeutige Function von z ist, so muss sie für jeden reellen Wert von z ebenfalls einen reellen Wert erhalten. Weil nun Z für $z = a$ den Wert A, für $z = b$ den Wert B annimmt, so kann Z nicht anders von dem Werte A zum Werte B übergehen, als dadurch, dass sie alle zwischen beiden gelegenen Werte durchläuft. Wenn daher sowohl die Gleichung $Z - A = 0$ als die Gleichung $Z - B = 0$ eine reelle Wurzel hat, so wird auch der Gleichung $Z - C = 0$ durch einen reellen Wert von z genügt werden können, falls C zwischen A und B liegt. Besitzen also die Ausdrücke $Z - A$ und $Z - B$ einen einfachen reellen Factor, dann hat auch allemal der Ausdruck $Z - C$ einen einfachen reellen Factor, wofern nur C zwischen A und B liegt.

§ 34.

Ist in der ganzen Function Z der **Exponent der höchsten Potenz** von z eine **ungerade Zahl** $2n + 1$, so besitzt die Function **mindestens einen reellen einfachen Factor.**

Hat nämlich Z die Form:

$$z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \ldots,$$

so wird für $z = \infty$ auch $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$, da die Werte der einzelnen Glieder im Vergleich zu dem des ersten nicht in Betracht kommen. Es hat daher $Z - \infty$ den einfachen reellen Factor $z - \infty$. Für $z = -\infty$ aber wird $Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$, und es besitzt somit $Z + \infty$ den einfachen reellen Factor $z + \infty$. Da nun sowohl $Z - \infty$ als $Z + \infty$ einen einfachen reellen Factor haben, so muss auch $Z + C$ einen solchen besitzen, vorausgesetzt, dass C zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ enthalten, also eine beliebige reelle, positive oder negative Zahl ist. Nimmt man also $C = 0$, so wird auch die Function Z selbst einen einfachen reellen Factor $z-c$ besitzen, und die Grösse c wird innerhalb der Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ liegen, also entweder eine positive oder negative Grösse oder Null sein.

§ 35.

Eine ganze Function Z, in welcher der **Exponent der höchsten Potenz** von z eine **ungerade** Zahl ist, hat daher entweder **einen oder drei oder fünf oder sieben u. s. w. reelle einfache Factoren.**

Wie bewiesen, hat die Function Z sicher einen einfachen reellen Factor $z-c$. Nehmen wir an, sie besitze ausserdem nur noch einen solchen $z-d$, und dividiren wir die Function Z, in welcher die höchste Potenz von z die $2n+1$te sein möge, durch $(z-c)(z-d)$, so wird die höchste im Quotienten vorkommende Potenz von z die $2n-1$te sein, und da diese Zahl eine ungerade ist, so erhellt daraus, dass die Function Z noch einen einfachen reellen Factor besitzen muss. Hat daher die Function Z mehr als einen einfachen reellen Factor, so muss sie deren entweder drei oder (da man dieselbe Schlussfolgerung beliebig fortsetzen kann) fünf oder sieben u. s. w. besitzen. Es wird somit die Anzahl der einfachen reellen Factoren eine ungerade, die der imaginären also eine gerade Zahl sein, da ja die Anzahl aller einfachen Factoren $2n+1$ ist.

§ 36.

Eine ganze Function Z, in welcher der **Exponent der höchsten Potenz von** z eine **gerade Zahl** $2n$ ist, hat entweder **gar keinen**, oder **zwei oder vier oder sechs u. s. w. einfache reelle Factoren.**

Nehmen wir an, die Function Z habe einfache reelle Factoren in ungerader Zahl, etwa $2m+1$, und dividiren wir sie durch das Product aller dieser Factoren, so ist die höchste Potenz, welche in dem Quotienten vorkommt, $z^{2n-2m-1}$. Da somit der Exponent dieser Potenz eine ungerade Zahl ist, so besitzt die Function Z sicher noch einen einfachen reellen Factor, und es ist daher die Anzahl aller einfachen reellen Factoren mindestens gleich $2m+2$, also eine gerade Zahl. Demnach sind auch imaginäre Factoren nur in gerader Anzahl vorhanden, und es besitzt somit jede ganze Function, wie bereits früher gezeigt, stets eine gerade Anzahl einfacher imaginärer Factoren.

§ 37.

Wenn in einer ganzen Function Z der **Exponent der höchsten Potenz** von z eine **gerade** Zahl und das **absolute oder constante Glied negativ** ist, so besitzt dieselbe mindestens **zwei einfache reelle Factoren.**

Da nämlich die in Rede stehende Function Z von der Form:

$$z^{2n}\pm\alpha z^{2n-1}\pm\beta z^{2n-2}\pm\ldots\pm\nu z-A$$

ist, so wird, wie in § 34 bemerkt wurde, $Z=\infty$ für $z=\infty$; ferner ist $Z=-A$ für $z=0$. Es besitzt daher $Z-\infty$ den reellen Factor $z-\infty$ und $Z+A$ den Factor $z-0$. Da nun 0 zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+A$ enthalten ist, so muss $Z+0$ einen einfachen reellen Factor $z-c$ besitzen, wo c zwischen den Grenzen 0 und ∞ liegt. Setzt man ferner $z=-\infty$, so wird $Z=\infty$; es besitzt somit $Z-\infty$ den Factor $z+\infty$ und $Z+A$ den Factor $z+0$. Folglich besitzt $Z+0$ auch einen einfachen reellen Factor $z+d$, wo d zwischen den Grenzen 0 und ∞ liegt. Damit ist der Satz bewiesen. Hieraus erhellt zugleich, dass die Gleichung $Z=0$, wenn Z eine Function von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit ist, mindestens zwei reelle Wurzeln, und zwar eine positive und eine negative haben muss. Die Gleichung $z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z-a^2=0$ besitzt also beispielsweise zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

§ 38.

Wenn in einer **gebrochenen** Function die **höchste Potenz** der veränderlichen Zahlgrösse z **im Zähler** einen **ebenso hohen** oder **höheren Exponenten***) hat als **im Nenner**, so lässt sich die Function **in zwei Teile** zerlegen, von denen der **eine eine ganze Function** und **der andere ein Bruch** ist, dessen Nenner **höhere Potenzen von** z **enthält als der Zähler.**

Ist nämlich der Exponent der höchsten Potenz von z im Nenner kleiner als im Zähler, so dividire man auf die gewöhnliche Weise den Zähler durch den Nenner, bis man im Quotienten auf Potenzen von z mit negativen Exponenten kommt. Bricht man an dieser Stelle die Operation des Dividirens ab, so wird der Quotient aus einer ganzen Function und einem Bruche bestehen, in dessen Zähler der Exponent der höchsten Potenz von z kleiner ist als im Nenner. Dieser Quotient ist aber der gegebenen Function gleich. Ist z. B. die gegebene Function: $\frac{1+z^4}{1+z^2}$, so zerlegt man sie durch Division in folgender Weise:

$$
\begin{array}{l}
z^2+1 \mid z^4+1 = z^2-1+\dfrac{2}{1+z^2} \\
\quad\quad\;\; \underline{z^4+z^2} \\
\quad\quad\;\; -z^2+1 \\
\quad\quad\;\; \underline{-z^2-1} \\
\quad\quad\quad\;\; +2\,.
\end{array}
$$

Es ist demnach:

$$\frac{1+z^4}{1+z^2}=z^2-1+\frac{2}{1+z^2}.$$

*) Vergl. Anmerkung zu § 25. Anm. d. Uebers.

Derartige gebrochene Functionen, in welchen die höchste Potenz der veränderlichen Zahlgrösse z im Zähler denselben oder einen höheren Exponenten hat, als im Nenner, kann man ähnlich wie in der gemeinen Arithmetik unechte Brüche oder unechte gebrochene Functionen nennen, zum Unterschiede von den echten gebrochenen Functionen, bei denen der Nenner die veränderliche Zahlgrösse z in einer höheren Potenz enthält als der Zähler. Es kann somit jede unechte gebrochene Function in eine ganze und in eine echte gebrochene Function zerlegt werden, und zwar geschieht dies vermittelst des gewöhnlichen Divisionsverfahrens.

§ 39.

Wenn der **Nenner** einer gebrochenen Function **zwei Factoren** besitzt, welche prim zu einander sind, d. h. keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so lässt sich die Function selbst **in zwei Brüche** zerlegen, deren Nenner bezüglich jenen Factoren gleich sind.

Obwohl eine solche Zerlegung ebensowohl für unechte wie für echte gebrochene Functionen möglich ist, so werden wir sie doch hauptsächlich auf echte gebrochene Funtionen anwenden. Hat man den Nenner einer solchen gebrochenen Function in zwei zu einander prime Factoren zerlegt, so lässt sich auch die Function in zwei andere echte gebrochene Functionen zerlegen, deren Nenner jenen beiden Factoren bezüglich gleich sind, und zwar ist eine solche Zerlegung bei echten Brüchen nur auf eine einzige Weise möglich. Von der Richtigkeit dieser Tatsache wird man sich leichter durch ein Beispiel als durch allgemeine Schlüsse überzeugen. In der gebrochenen Function:

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}$$

z. B. ist der Nenner $1+4z^4$ gleich dem Producte:

$$(1+2z+2z^2)(1-2z+2z^2);$$

es kann also der gegebene Bruch in zwei solche zerlegt werden, von welchen der eine $1+2z+2z^2$, der andere $1-2z+2z^2$ zum Nenner hat. Da diese Brüche echte Brüche sind, so setzen wir zur Bestimmung derselben ihre Zähler bezüglich gleich $\alpha+\beta z$ und $\gamma+\delta z$. Dann ist der Annahme nach:

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}=\frac{\alpha+\beta z}{1+2z+2z^2}+\frac{\gamma+\delta z}{1-2z+2z^2}.$$

Vereinigt man rechterhand wiederum die beiden Brüche, so erhält man für die Summe

als Zähler:	als Nenner:
$\begin{aligned}&\alpha-2\alpha z+2\alpha z^2\\&\quad+\beta z-2\beta z^2+2\beta z^3\\&+\gamma+2\gamma z+2\gamma z^2\\&\quad+\delta z+2\delta z^2+2\delta z^3\end{aligned}$	$1+4z^4.$

Da nun der Nenner gleich ist dem Nenner des gegebenen Bruches, so müssen auch die Zähler einander gleich gemacht werden, und da ebensoviele unbekannte Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vorkommen, als Glieder einander gleich zu setzen sind, so kann dies stets und nur auf eine Weise geschehen. Man erhält nämlich die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \alpha+\gamma=1\\
&2)\quad -2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=-2\\
&3)\quad 2\alpha-2\beta+2\gamma+2\delta=3\\
&4)\quad 2\beta+2\delta=-4.
\end{aligned}$$

Da also $\alpha+\gamma=1$, und $\beta+\delta=-2$ ist, so geben die Gleichungen 2) und 3) $\alpha-\gamma=0$ und $\delta-\beta=\frac{1}{2}$. Es wird somit:

$$\alpha=\tfrac{1}{2},\ \gamma=\tfrac{1}{2},\ \beta=-\tfrac{5}{4},\ \delta=-\tfrac{3}{4},$$

und dadurch der gegebene Bruch:

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}$$

verwandelt in die beiden:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z}{1+2z+2z^2}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z}{1-2z+2z^2}.$$

Man sieht leicht ein, dass die Zerlegung stets auf ähnliche Weise ausführbar sein muss, da man ja stets nur so viele Unbekannten einführt, als nötig sind, um den gegebenen Zähler herzustellen. Aus der Lehre von den gemeinen Brüchen aber weiss man, dass eine solche Zerlegung nur dann möglich ist, wenn die Factoren des Nenners prim zu einander sind.

§ 40.

Eine **gebrochene** Function $\frac{M}{N}$ kann also stets in **so viele einfache** Brüche von der Form $\frac{A}{p-qz}$ zerlegt werden, als der Nenner einfache von einander verschiedene Factoren hat.

Der Bruch $\frac{M}{N}$ stellt eine beliebige echte gebrochene Function dar, in welcher M und N ganze Functionen von z sind, und die höchste Potenz von z in M niedriger ist als die in N. Wenn man nun den Nenner N in seine einfachen Factoren zerlegt, und diese sind von einander verschieden, so lässt sich der Ausdruck $\frac{M}{N}$ in so viele Brüche zerlegen, als der Nenner N einfache Factoren enthält, weil ein jeder Factor den Nenner eines Partialbruchs abgiebt. Ist also $p - qz$ ein Factor von N, so wird er auch Nenner eines gewissen Partialbruchs, und da im Zähler dieses Bruches der Exponent der höchsten Potenz von z kleiner sein muss als im Nenner, so muss der Zähler notwendig eine Constante sein. Es entsteht folglich aus einem jeden einfachen Factor $p - qz$ des Nenners ein einfacher Bruch $\frac{A}{p - qz}$, und die Summe aller dieser Brüche ist dem gegebenen Bruche $\frac{M}{N}$ gleich.

Beispiel.

Ist z. B. die gebrochene Function

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3}$$

gegeben, so sind die einfachen Factoren des Nenners: z, $1 - z$ und $1 + z$; dieselbe lässt sich also in drei einfache Brüche zerlegen, nämlich in:

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{1 - z} + \frac{C}{1 + z} = \frac{1 + z^2}{z - z^3}.$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die constanten Zähler A, B, C zu bestimmen. Bringt man dazu diese Brüche auf den gemeinsamen Nenner $z - z^3$, so ergiebt sich, da die Summe der Zähler gleich $1 + z^2$ sein soll, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} A + Bz - Az^2 \\ + Cz + Bz^2 \\ - Cz^2 \end{aligned}\right\} = 1 + z^2 = 1 + 0 \cdot z + z^2.$$

Durch Gleichsetzung entsprechender Coefficienten erhält man hieraus so viele Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind, nämlich:

$$\begin{aligned} &1) & A &= 1 \\ &2) & B + C &= 0 \\ &3) & -A + B - C &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $B - C = 2$, und somit:

$$A = 1,\quad B = 1,\quad C = -1.$$

Die gegebene Function

$$\frac{1 + z^2}{z - z^3}$$

lässt sich demnach in

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$$

zerlegen. Ebenso überzeugt man sich, dass, wie viele von einander verschiedene einfache Factoren der Nenner N auch immer haben möge, der Bruch $\frac{M}{N}$ stets in ebenso viele einfache Brüche zerlegt werden kann. Sobald aber einige der Factoren einander gleich sind, muss man sich eines anderen später zu erörternden Verfahrens für die Zerlegung bedienen.

§ 41.

Da somit ein jeder einfache Factor des Nenners N bei der Zerlegung der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ einen einfachen Bruch liefert, so muss man zeigen, wie aus einem bekannten Factor des Nenners N der entsprechende einfache Bruch gefunden werden kann.

Es sei $p - qz$ ein einfacher Factor von N, also:

$$N = (p - qz)S,$$

wo S eine ganze Function von z bedeutet, und es werde der aus dem Factor $p - qz$ entspringende Bruch gleich $\frac{A}{p - qz}$, und ebenso der aus dem Factor S entspringende Bruch gleich $\frac{P}{S}$ gesetzt.

Dann ist nach § 39:

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qz)S}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz)S}.$$

Da diese beiden Brüche mit einander übereinstimmen sollen, so muss notwendig $M - AS$ durch $p - qz$ teilbar sein; denn es ist die ganze Function P dem Quotienten $\frac{M - AS}{p - qz}$ gleich. Ist aber $p - qz$ ein Teiler von $M - AS$, so verschwindet dieser Ausdruck, wenn man darin $z = \frac{p}{q}$ setzt. Substituirt man also in M und S überall für z den constanten Wert $\frac{p}{q}$, so wird $M - AS = 0$, also $A = \frac{M}{S}$. Auf diese Weise findet man den Zähler A des gesuchten Bruches $\frac{A}{p - qz}$. Bildet man nun aus den einzelnen einfachen Factoren des Nenners N, vorausgesetzt, dass dieselben von einander verschieden sind, die entsprechenden einfachen Brüche, so ist die Summe aller dieser einfachen Brüche gleich der gegebenen Function $\frac{M}{N}$.

Beispiel.

Betrachtet man in dem vorher behandelten Beispiele:

$$\frac{1+z^2}{z-z^3},$$

wo also $M = 1 + z^2$ und $N = z - z^3$ ist, zunächst den einfachen Factor z, so ist $S = 1 - z^2$, und der Zähler des dazu gehörigen einfachen Bruches $\frac{A}{z}$ ergiebt sich aus $A = \frac{1+z^2}{1-z^2}$, wenn man darin $z = 0$, nämlich für z denjenigen Wert setzt, welchen man erhält, wenn der einfache Factor selbst der Null gleichgesetzt wird. Es ist also $A = 1$. Ebenso entsteht, wenn man den Factor $1 - z$ des Nenners nimmt, so dass also $S = z + z^2$ ist, aus $A = \frac{1+z^2}{z+z^2}$ für $1 - z = 0$ der Wert $A = 1$, und somit aus dem Factor $1 - z$ der Bruch $\frac{1}{1-z}$. Für den dritten Factor $1 + z$ endlich wird $S = z - z^2$ und $A = \frac{1+z^2}{z-z^2}$ für $1 + z = 0$ oder $z = -1$, d. h. $A = -1$, und der entsprechende Bruch ist $\frac{-1}{1+z}$. Man findet also auf diesem Wege ebenso wie vorher:

$$\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}.$$

§ 42.

Eine gebrochene Function von der Form $\frac{P}{(p-qz)^n}$, in welcher der Zähler nur **niedrigere** Potenzen von z enthält, als die höchste Potenz von z im **Nenner** $(p - qz)^n$ beträgt, lässt sich in eine Summe von Partialbrüchen von **folgender Form**:

$$\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \cdots + \frac{K}{p-qz},$$

in denen die Zähler sämtlich constante Grössen sind, **verwandeln.**

Da die höchste Potenz von z in P niedriger ist, als z^n, so kann sie höchstens z^{n-1} sein, und es wird somit P die Form haben:

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots + \varkappa z^{n-1}.$$

Dieser Ausdruck besteht aus n Gliedern und muss gleich sein dem Zähler der Summe aller Partialbrüche, nachdem man letztere auf den gemeinschaftlichen Nenner $(p - qz)^n$ gebracht hat. Dieser Zähler ist gleich:

$$A + B(p - qz) + C(p - qz)^2 + D(p-qz)^3 + \cdots + K(p - qz)^{n-1}.$$

Die höchste Potenz von z ist hier ebenso wie in jenem Ausdrucke z^{n-1}, und es sind genau ebenso viele (nämlich n) unbekannte Grössen A, B, C, ... K vorhanden, als Glieder einander gleichzusetzen sind. Es lassen sich daher die constanten Grössen ABC... so bestimmen, dass die echte gebrochene Function:

$$\frac{P}{(p-qz)^n} = \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \cdots + \frac{K}{p-qz}$$

wird. Für die wirkliche Bestimmung dieser Zähler werden wir sogleich ein einfaches Verfahren angeben.

§ 43.

Besitzt der **Nenner** N der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den **Factor** $(p - qz)^2$, so findet man die aus diesem Factor entspringenden Partialbrüche auf folgende Weise:

Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, wie aus den einzelnen einfachen und nur einmal darin enthaltenen Factoren des Nenners die zugehörigen Partialbrüche gefunden werden. Jetzt nehmen wir an, dass zwei der Factoren einander gleich seien, oder dass $(p - qz)^2$ ein Factor des Nenners N sei. Aus diesem Factor entspringen nach dem vorigen Paragraphen zwei Partialbrüche von der Form: $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$. Setzt man nun:

$$N = (p - qz)^2 S,$$

so wird:

$$\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S},$$

wobei $\frac{P}{S}$ alle einfachen Brüche zusammengenommen bezeichnet, welche aus dem Factor S des Nenners entspringen. Hieraus folgt:

$$\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2 S}$$

und:

$$P = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2} = \text{einer ganzen Function von } z.$$

Es muss daher $M - AS - B(p - qz)S$ durch $(p - qz)^2$ teilbar sein. Ist dieser Ausdruck zunächst durch $p - qz$ teilbar, so verschwindet derselbe, wenn man darin $p - qz = 0$ oder $z = \frac{p}{q}$ setzt. Für $z = \frac{p}{q}$ wird also $M - AS = 0$, und daher:

$$A = \frac{M}{S}.$$

Es giebt daher der Bruch $\frac{M}{S}$, wenn man darin an Stelle von z überall $\frac{p}{q}$ setzt, den Wert der Constanten A. Ist dieser gefunden, so muss, da ja der Ausdruck $M - AS - B(p - qz)S$ durch $(p - qz)^2$ teilbar sein soll, auch noch $\frac{M - AS}{p - qz} - BS$ durch $p - qz$ geteilt werden können. Setzt man daher überall $z = \frac{p}{q}$, so wird:

$$\frac{M - AS}{p - qz} = BS,$$

oder:

$$B = \frac{M - AS}{(p-qz)S} = \frac{1}{p-qz}\left(\frac{M}{S} - A\right),$$

wobei wohl zu beachten ist, dass man, weil $M - AS$ durch $p - qz$ teilbar ist, diese Division erst wirklich auszuführen hat, bevor man $\frac{p}{q}$ für z substituirt. Setzt man:

$$\frac{M - AS}{p - qz} = T,$$

so wird:

$$B = \frac{T}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Nachdem so die Zähler A und B gefunden sind, werden die aus dem Factor $(p - qz)^2$ des Nenners N entspringenden Partialbrüche: $\frac{A}{(p - qz)^2} + \frac{B}{p - qz}$ sein.

Erstes Beispiel.

Es sei

$$\frac{1 - z^2}{z^2(1 + z^2)}$$

die gegebene gebrochene Function. Da das Quadrat z^2 ein Factor des Nenners ist, so wird $S = 1 + z^2$, $M = 1 - z^2$. Sind demnach die aus z^2 entspringenden Partialbrüche:

$$\frac{A}{z^2} + \frac{B}{z},$$

so wird:

$$A = \frac{M}{S} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \text{ für } z = 0, \text{ also } A = 1,$$

und

$$M - AS = -2z^2.$$

Dividirt man nun den letzteren Ausdruck durch den einfachen Factor z, so wird $T = -2z$, und daher:

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1 + z^2} \text{ für } z = 0, \text{ also } B = 0.$$

Es entspringt somit aus dem Factor z^2 des Nenners nur der eine Partialbruch $\frac{1}{z^2}$.

Zweites Beispiel.

Es sei die gebrochene Function

$$\frac{z^3}{(1 - z)^2(1 + z^4)}$$

gegeben. Weil das Quadrat $(1 - z)^2$ ein Factor des Nenners ist, so werden die Partialbrüche, welche daraus entspringen:

$$\frac{A}{(1 - z)^2} + \frac{B}{1 - z}.$$

Es ist also $M = z^3$ und $S = 1 + z^4$, mithin:

$$A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1 + z^4} = \frac{1}{2} \text{ für } 1 - z = 0 \text{ oder } z = 1.$$

Folglich ist:

$$M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4,$$

und dieses durch $1 - z$ dividirt, giebt:

$$T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3;$$

demnach:

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-1 - z - z^2 + z^3}{2 + 2z^4} \text{ für } z = 1, \text{ d. i. } B = \frac{-1}{2}.$$

Die gesuchten Partialbrüche sind daher:

$$\frac{1}{2(1 - z)^2} - \frac{1}{2(1 - z)}.$$

§ 44.

Wenn der Nenner N der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den Factor $(p - qz)^3$ hat, so findet man die aus diesem Factor entspringenden Partialbrüche $\frac{A}{(p - qz)^3} + \frac{B}{(p - qz)^2} + \frac{C}{p - qz}$ auf folgende Weise:

Setzt man:

$$N = (p - qz)^3 S,$$

und bezeichnet man den Bruch, welcher aus dem Factor S hervorgeht, mit $\frac{P}{S}$, so wird:

$$P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3} = \text{einer ganzen Function von } z.$$

Es muss also der Zähler $M - AS - B(p - qz)S - C(p - qz)^2 S$ vor allen Dingen durch $p - qz$ teilbar sein, d. h. er muss für $p - qz = 0$ oder $z = \frac{p}{q}$ verschwinden. Es ist daher $M - AS = 0$, oder

$$A = \frac{M}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Hat man so A gefunden, so ist $M - AS$ teilbar durch $p - qz$. Setzt man also:

$$\frac{M - AS}{p - qz} = T,$$

so muss der Ausdruck $T - BS - C(p - qz)S$ noch durch $(p - qz)^2$ teilbar sein; er wird daher gleich 0, wenn man darin $z = \frac{p}{q}$ setzt, oder es ist:

$$B = \frac{T}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Ist auf diese Weise B bestimmt, so lässt sich $T - BS$ durch $p - qz$ teilen. Setzt man also den Quotienten:

$$\frac{T - BS}{p - qz} = V,$$

so ist schliesslich noch $V - CS$ durch $p - qz$ teilbar, oder es ist $V - CS = 0$ für $p - qz = 0$. Es wird daher:

$$C = \frac{V}{S} \text{ für } z = \frac{p}{q}.$$

Auf diese Weise sind die Zähler A, B, C gefunden, und die aus dem Factor $(p - qz)^3$ des Nenners N entspringenden Partialbrüche werden:

$$\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}.$$

Beispiel.

Ist etwa

$$\frac{z^2}{(1-z)^3(1+z^2)}$$

die gegebene gebrochene Function, so entstehen aus dem kubischen Factor

$(1 - z)^3$ des Nenners folgende Partialbrüche:

$$\frac{A}{(1-z)^3} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-z}.$$

Es ist also $M = z^2$, $S = 1 + z^2$, und daher zunächst:

$$A = \frac{z^2}{1+z^2} \text{ für } 1 - z = 0 \text{ oder } z = 1, \text{ d. i. } A = \frac{1}{2}.$$

Setzt man jetzt:

$$T = \frac{M - AS}{1 - z} = \frac{\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}}{1 - z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z,$$

so wird:

$$B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{1 + z^2} \text{ für } z = 1, \text{ also } B = -\frac{1}{2}.$$

Setzt man endlich:

$$V = \frac{T - BS}{1 - z} = \frac{T + \frac{1}{2}S}{1 - z},$$

so wird:

$$V = \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2}{1 - z} = -\frac{1}{2}z;$$

es ist somit:

$$C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1 + z^2} \text{ für } z = 1, \text{ oder } C = -\frac{1}{4},$$

und die aus dem Factor $(1 - z)^3$ des Nenners hervorgehenden Partialbrüche werden:

$$\frac{1}{2(1-z)^3} - \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{4(1-z)}.$$

§ 45.

Wenn der **Nenner** N der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ **den Factor** $(p - qz)^n$ hat, so findet man die daraus entstehenden Partialbrüche:

$$\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \cdots + \frac{K}{p-qz}$$

auf folgende Weise:

Setzt man den Nenner

$$N = (p - qz)^n Z,$$

so findet man durch dieselben Schlüsse wie vorher:

1) $A=\frac{M}{Z}$ für $z=\frac{p}{q}$. Setzt man dann: $P=\frac{M-AZ}{p-qz}$, so wird:

2) $B=\frac{P}{Z}$ für $z=\frac{p}{q}$. Setzt man dann: $Q=\frac{P-BZ}{p-qz}$, so wird:

3) $C=\frac{Q}{Z}$ für $z=\frac{p}{q}$. Setzt man dann: $R=\frac{Q-CZ}{p-qz}$, so wird:

4) $D=\frac{R}{Z}$ für $z=\frac{p}{q}$. Setzt man dann: $S=\frac{R-DZ}{p-qz}$, so wird:

5) $E=\frac{S}{Z}$ für $z=\frac{p}{q}$ u. s. w.

Hat man auf diese Weise die einzelnen constanten Zähler A, B, C, D u. s. w. bestimmt, so sind damit sämtliche Partialbrüche, welche aus dem Factor $(p-qz)^n$ des Nenners N entspringen, gefunden.

Beispiel.

Ist die gebrochene Function

$$\frac{1+z^2}{z^5(1+z^3)}$$

gegeben, so entspringen aus dem Factor z^5 des Nenners folgende Partialbrüche:

$$\frac{A}{z^5}+\frac{B}{z^4}+\frac{C}{z^3}+\frac{D}{z^2}+\frac{E}{z}.$$

Um die constanten Zähler derselben zu finden, setze man $M=1+z^2$, $Z=1+z^3$ und $\frac{p}{q}=0$, und rechne dann folgendermassen:

Zuerst ist $A=\frac{M}{Z}=\frac{1+z^2}{1+z^3}$ für $z=0$, also $A=1$.

Setzt man nun $P=\frac{M-AZ}{z}=\frac{z^2-z^3}{z}=z-z^2$, so wird zweitens: $B=\frac{P}{Z}=\frac{z-z^2}{1+z^3}$ für $z=0$, also $B=0$.

Setzt man dann $Q=\frac{P-BZ}{z}=\frac{z-z^2}{z}=1-z$, so wird drittens: $C=\frac{Q}{Z}=\frac{1-z}{1+z^3}$ für $z=0$, also $C=1$.

Setzt man ferner $R=\frac{Q-CZ}{z}=\frac{-z-z^3}{z}=-1-z^2$, so wird viertens: $D=\frac{R}{Z}=\frac{-1-z^2}{1+z^3}$ für $z=0$, also $D=-1$.

Setzt man endlich $S=\frac{R-DZ}{z}=\frac{-z^2+z^3}{z}=-z+z^2$, so wird fünftens: $E=\frac{S}{Z}=\frac{-z+z^2}{1+z^3}$ für $z=0$, also $E=0$.

Es sind daher:

$$\frac{1}{z^5}+\frac{0}{z^4}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{0}{z}$$

die gesuchten Partialbrüche.

§ 45a*).

Jede beliebige gegebene rationale gebrochene Function $\frac{M}{N}$ kann somit in folgender Weise in Teile zerlegt und auf die einfachste Form gebracht werden.

Man suche zunächst alle einfachen reellen oder imaginären Factoren des Nenners N. Diejenigen, welche nur einmal vorkommen, betrachte man für sich und suche zu jedem derselben nach § 41 den ihm entsprechenden Partialbruch. Kommt jedoch ein und derselbe einfache Factor zwei oder mehrere Mal vor, so vereinige man diese und suche zu dem Product, welches eine Potenz von der Form $(p-qz)^n$ ist, nach § 45 die zugehörigen Partialbrüche. Hat man auf diese Weise aus den einzelnen einfachen Factoren des Nenners die Partialbrüche abgeleitet, so ist das Aggregat derselben gleich der gegebenen Function, wofern diese nicht etwa eine unecht gebrochene ist. In letzterem Falle muss man überdies den ganzen Teil absondern und zu den gefundenen Partialbrüchen hinzufügen, wodurch man den Wert der Function $\frac{M}{N}$ in der einfachsten Form erhält. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Partialbrüche vor der Absonderung des ganzen Teiles oder erst nach derselben aufsucht. Denn man erhält aus den einzelnen Factoren des Nenners N dieselben Partialbrüche, mag man nun den Zähler M selbst, oder diesen um irgend ein Vielfaches des Nenners N vermehrt oder vermindert nehmen, eine Tatsache, deren Richtigkeit sofort einleuchtet, wenn man die gegebenen Regeln genau betrachtet.

Beispiel.

Es wird verlangt, den Wert der Function:

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

in der einfachsten Form auszudrücken.

Nimmt man zuerst den nur einmal vorkommenden Factor $1+z$ des Nenners, welcher $\frac{p}{q}=-1$ ergiebt, so wird hierfür $M=1$ und $Z=z^3-2z^4+z^5$.

*) Im Originale finden sich zwei mit der Zahl 46 bezeichnete Paragraphen, von denen der zweite bereits zum folgenden Capitel gehört. Um daher im Folgenden bezüglich der Bezeichnung der Paragraphen mit dem Original in Uebereinstimmung zu bleiben, habe ich diesen Paragraphen, der sich unmittelbar an den vorhergehenden anschliesst, mit § 45a bezeichnet. Anm. d. Uebers.

Zur Bestimmung des Bruches $\frac{A}{1+z}$ hat man also:

$$A = \frac{1}{z^3 - 2z^4 + z^5} \text{ für } z = -1, \text{ also } A = -\frac{1}{4}.$$

Es entsteht somit aus dem Factor $1 + z$ der Partialbruch:

$$\frac{-1}{4(1+z)}.$$

Jetzt nehme man den quadratischen Factor $(1-z)^2$, welcher $\frac{p}{q} = 1$, $M = 1$ und $Z = z^3 + z^4$ liefert. Setzt man die daraus entspringenden Partialbrüche gleich

$$\frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z},$$

so wird:

$$A = \frac{1}{z^3 + z^4} \text{ für } z = 1, \text{ d. i. } A = \frac{1}{2};$$

ferner:

$$P = \frac{M - \frac{1}{2}Z}{1-z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1-z} = 1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3,$$

mithin:

$$B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3}{z^3 + z^4} \text{ für } z = 1, \text{ oder } B = \frac{7}{4}.$$

Die gesuchten Partialbrüche sind also:

$$\frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)}.$$

Endlich giebt der dritte kubische Factor z^3:

$$\frac{p}{q} = 0, \quad M = 1 \text{ und } Z = 1 - z - z^2 + z^3.$$

Sind demnach

$$\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z}$$

die zugehörigen Partialbrüche, so wird zunächst:

$$A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^3} \text{ für } z = 0, \text{ also } A = 1;$$

ferner:

$$P = \frac{M - Z}{z} = 1 + z - z^2,$$

und daher:

$$B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z - z^2}{1 - z - z^2 + z^3} \text{ für } z = 0, \text{ oder } B = 1;$$

endlich:

$$Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - z^2,$$

folglich:

$$C = \frac{Q}{Z} \text{ für } z = 0, \text{ oder } C = 2.$$

Es lässt sich daher die gegebene Function

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

auf die Form:

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)}$$

bringen. Ein ganzer Teil tritt hier nicht hinzu, weil die gegebene Function keine unecht gebrochene ist.

3. Capitel.

Von der Umformung der Functionen durch Substitution.

§ 46.

Wenn y irgend eine Function von z ist, und z durch eine neue Veränderliche x bestimmt wird, so lässt sich auch y durch x bestimmen.

Während also vorher y eine Function von z war, sollen jetzt durch Einführung einer neuen veränderlichen Zahlgrösse x die beiden Grössen y und z durch x ausgedrückt werden. Ist z. B.

$$y = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},$$

und setzt man:

$$z = \frac{1 - x}{1 + x},$$

so geht y durch diese Substitution über in:

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Aus jedem beliebigen bestimmten Werte von x erhält man also bestimmte Werte von z und y, und zwar ist der so gefundene Wert von y derselbe wie der, welchen man aus dem Ausdruck von y durch z erhält, wenn man darin für z den soeben erhaltenen Wert einsetzt. So wird für $x = \frac{1}{2}$: $z = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{4}{5}$; denselben Wert für y findet man aber auch, wenn man in dem Ausdrucke $\frac{1 - z^2}{1 + z^2}$ den Wert $z = \frac{1}{3}$ substituirt.

Der Einführung einer neuen Veränderlichen bedient man sich zu einem doppelten Zwecke: **Entweder** nämlich geschieht dies, um dadurch **die Irrationalität wegzuschaffen,** wenn eine solche in dem Ausdrucke von y durch z vorkommt, oder man sucht, wenn die Beziehung zwischen y und z durch eine Gleichung höheren Grades gegeben ist, aus welcher man y nicht explicite durch z darzustellen vermag, eine neue Veränderliche x einzuführen, um durch sie sowohl y als z in bequemer Weise zu bestimmen. Obwohl bereits hieraus der ausserordentliche Nutzen der Substitutionen zur Genüge erhellt, so wird derselbe im Folgenden doch noch um vieles deutlicher ersichtlich werden.

§ 47.

Ist $y = \sqrt{a + bz}$, so findet man eine neue Veränderliche x, durch welche sich z und y rational ausdrücken lassen, in folgender Weise:

Dass z und y rationale Functionen von x werden, erreicht man offenbar dadurch, dass man $\sqrt{a + bz} = bx$ setzt. Denn es ist dann $y = bx$ und $a + bz = b^2x^2$, also $z = bx^2 - \frac{a}{b}$. Um also sowohl y als z rational durch x auszudrücken, braucht man nur, wenn $y = \sqrt{a + bz}$ ist, $z = bx^2 - \frac{a}{b}$ zu setzen, indem dann $y = bx$ wird.

§ 48.

Wenn $y = (a + bz)^{m:n}$ ist, so findet man eine neue Veränderliche x, durch welche sich z und y rational ausdrücken lassen, in folgender Weise:

Setzt man $y = x^m$, so wird $(a + bz)^{m:n} = x^m$, folglich $(a + bz)^{1:n} = x$ und $a + bz = x^n$, also $z = \frac{x^n - a}{b}$. Auf diese Weise ist also jede der beiden Grössen y und z rational ausgedrückt durch x, und zwar mittelst der Substitution $z = \frac{x^n - a}{b}$, aus der dann weiter $y = x^m$ folgt. Obwohl also weder y durch z, noch umgekehrt z durch y rational ausdrückbar ist, so ist doch jede dieser Grössen eine rationale Function der neu eingeführten Veränderlichen x geworden, und dies gerade sollte durch die Substitution erreicht werden.

§ 49.

Ist $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{m:n}$, so soll eine neue Veränderliche x gefunden werden, durch welche sich y und z rational ausdrücken lassen.

Zunächst genügt man der gestellten Forderung augenscheinlich, wenn man $y = x^m$ setzt, denn es wird:

$$\left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{m:n} = x^m,$$

also

$$\frac{a+bz}{f+gz}=x^n,$$

und hieraus:

$$z=\frac{a-fx^n}{gx^n-b}.$$

Umgekehrt erhält man aus diesem Werte von z wieder $y=x^m$. Hiernach ist auch leicht ersichtlich, dass wenn

$$\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n=\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^m$$

ist, sowohl y als z rational ausgedrückt werden kann, indem man jeden dieser Ausdrücke gleich x^{mn} setzt. Man findet nämlich ohne Schwierigkeit:

$$y=\frac{\alpha-\gamma x^m}{\delta x^m-\beta},\quad z=\frac{a-fx^n}{gx^n-b}.$$

§ 50.

Ist $y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$, so findet man eine passende Substitution, um y und z rational auszudrücken, in folgender Weise:

Setzt man:

$$\sqrt{(a+bz)(c+dz)}=(a+bz)\,x,$$

so ergiebt sich offenbar ein rationaler Wert für z, da z sich aus einer linearen Gleichung bestimmt. Es wird nämlich:

$$c+dz=(a+bz)x^2,$$

und daher:

$$z=\frac{c-ax^2}{bx^2-d}.$$

Ferner wird:

$$a+bz=\frac{bc-ad}{bx^2-d}$$

und, da

$$y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}=(a+bz)\,x$$

ist, so wird:

$$y=\frac{(bc-ad)x}{bx^2-d}.$$

Es ist demnach die irrationale Function

$$y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$$

mittelst der Substitution

$$z=\frac{c-ax^2}{bx^2-d},$$

welche

$$y=\frac{(bc-ad)x}{bx^2-d}$$

liefert, auf eine rationale Form gebracht. Ist z. B.

$$y=\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{(a+z)(a-z)},$$

so ist $b=+1$, $c=a$, $d=-1$, und somit:

$$z=\frac{a-ax^2}{1+x^2}\text{ und }y=\frac{2ax}{1+x^2}.$$

So oft also die Function unter dem Quadratwurzelzeichen aus zwei einfachen reellen Factoren besteht, kann man auf die beschriebene Weise die rationale Form herstellen; sind dagegen diese Factoren imaginär, so wendet man besser folgendes Verfahren an:

§ 51.

Es sei $y=\sqrt{p+qz+rz^2}$; es soll eine Substitution für z gesucht werden, so dass der Wert von y rational wird.

Es kann dies auf mehrere Arten geschehen, je nachdem p und r positive oder negative Zahlgrössen sind. Ist zunächst p eine positive Zahlgrösse, so kann man $p=a^2$ setzen; denn obwohl p nicht gerade eine Quadratzahl zu sein braucht, so ist doch die Irrationalität constanter Zahlgrössen für die gegenwärtige Frage ohne Bedeutung.

Es sei also:

I. $$y=\sqrt{a^2+bz+cz^2}.$$

Setzt man dann:

$$\sqrt{a^2+bz+cz^2}=a+xz,$$

so wird:

$$b+cz=2ax+x^2z,$$

demnach:

$$z=\frac{b-2ax}{x^2-c},$$

und ferner:

$$y=a+xz=\frac{bx-ax^2-ac}{x^2-c}.$$

Es sind also z und y rationale Functionen von x. Ist nun

II. $$y=\sqrt{a^2z^2+bz+c},$$

so setze man:

$$\sqrt{a^2z^2+bz+c}=az+x.$$

Alsdann wird:

$$bz+c=2axz+x^2,$$

also:

$$z=\frac{x^2-c}{b-2ax},$$

und ferner:

$$y=az+x=\frac{-ac+bx-ax^2}{b-2ax}.$$

III. Sind endlich p und r negative Zahlgrössen, so ist der Wert von y nur dann nicht imaginär, wenn $q^2>4pr$ ist. Im letzteren Falle aber kann man den Ausdruck $p+qz+rz^2$ in zwei reelle Factoren zerlegen und damit diesen Fall auf den vorhergehenden Paragraphen zurückführen. Häufig ist es jedoch zweckmässiger, y auf die Form zu bringen:

$$y=\sqrt{a^2+(b+cz)(d+ez)}.$$

Um diese rational zu machen, setze man

$$y=a+(b+cz)x,$$

dann wird:

$$d+ez=2ax+bx^2+cx^2z,$$

demnach:

$$z=\frac{d-2ax-bx^2}{cx^2-e}$$

und

$$y=\frac{-ae+(cd-be)x-acx^2}{cx^2-e}.$$

In andern Fällen ist es zweckmässiger, y die Form zu geben:

$$y=\sqrt{a^2z^2+(b+cz)(d+ez)}.$$

Dann setze man:

$$y=az+(b+cz)x;$$

daraus wird:

$$d+ez=2axz+bx^2+cx^2z,$$

folglich:

$$z=\frac{bx^2-d}{e-2ax-cx^2}$$

und

$$y=\frac{-ad+(be-cd)x-abx^2}{e-2ax-cx^2}.$$

Beispiel.

So lässt sich z. B. die irrationale Function $y=\sqrt{-1+3z-z^2}$ auf die Form bringen:

$$y=\sqrt{1-2+3z-z^2}=\sqrt{1-(1-z)(2-z)}.$$

Setzt man daher:

$$y=1-(1-z)x,$$

so wird:

$$-2+z=-2x+x^2-x^2z,$$

demnach:

$$z=\frac{2-2x+x^2}{1+x^2}$$

und

$$1-z=\frac{-1+2x}{1+x^2},$$

also:

$$y=1-(1-z)x=\frac{1+x-x^2}{1+x^2}.$$

Dies sind ungefähr die Fälle, welche die unbestimmte Analytik oder die Lehre von den Diophantischen Gleichungen darbietet. Andere in diesen nicht mit einbegriffene Fälle lassen sich durch rationale Substitutionen nicht auf rationale Form bringen. Wir gehen daher dazu über, die zweite Art des Gebrauchs der Substitutionen zur Umformung der Functionen auseinanderzusetzen.

§ 52.

Ist y eine solche Function von z, dass $ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$ ist, so soll man eine neue Veränderliche x finden, vermittelst welcher sich die Werte von y und z explicite darstellen lassen.

Da man ein allgemeines Verfahren zur Auflösung der Gleichungen nicht kennt, so kann man aus der gegebenen Gleichung

$$ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$$

weder y durch z, noch umgekehrt z durch y explicite darstellen. Um daher diesem Uebelstande abzuhelfen, setze man:

$$y=x^m z^n.$$

Dadurch geht die Gleichung über in folgende:

$$ax^{\alpha m}z^{\alpha n}+bz^\beta+cx^{\gamma m}z^{\gamma n+\delta}=0.$$

Den Exponenten n bestimmen wir nun so, dass man aus dieser Gleichung den Wert von z finden kann. Es kann dies auf dreierlei Weise geschehen:

I. Wenn $\alpha n = \beta$, also $n = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, so wird obige Gleichung, wenn man sie durch $z^{\alpha n} = z^{\beta}$ dividirt:

$$ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}$$

oder:

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

und:

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}.$$

II. Wenn $\beta = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$ ist, so geht obige Gleichung, nachdem sie durch z^{β} dividirt worden, in folgende über:

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}} = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

und:

$$y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

III. Wenn $\alpha n = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$ ist, so wird die Gleichung, nachdem sie durch $z^{\alpha n}$ dividirt worden:

$$ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}} = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

und:

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}.$$

Wir haben also auf drei verschiedene Arten Functionen von x gefunden welche y und z gleich sind. Da man nun noch für m jede beliebige Zahl mit Ausnahme der 0 setzen darf, so kann man die gefundenen Ausdrücke auf die bequemste Form bringen.

Beispiel.

Es werde eine Function y durch die Gleichung

$$y^3 + z^3 - cyz = 0$$

definirt; man soll Functionen von x suchen, welche y und z gleich sind.

Es ist also hier:

$$a = -1, \quad b = -1, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1 \text{ und } \delta = 1.$$

Die erste Bestimmungsart giebt daher, wenn man $m = 1$ setzt:

$$z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1} \text{ und } y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1},$$

oder:

$$z = \frac{cx}{1 + x^3} \text{ und } y = \frac{cx^2}{1 + x^3},$$

also Ausdrücke, welche sogar rational sind.

Die zweite Art giebt folgende Werte:

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ und } y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

oder:

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{cx - 1} \text{ und } y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

Endlich wird nach der dritten Art:

$$z = (cx - x^3)^{\frac{1}{2}} \text{ und } y = x(cx - x^3)^{\frac{1}{2}}.$$

§ 53.

Hieraus lässt sich **rückwärts** beurteilen, wie beschaffen die Gleichungen zwischen y und z sein müssen, wenn dieselben in dieser Weise **durch Einführung einer neuen Veränderlichen** x sollen aufgelöst werden können.

Nehmen wir nämlich an, dass man die Auflösung bereits ausgeführt und dadurch die Werte

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \cdots}\right)^{p:r}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \cdots}\right)^{q:r}$$

erhalten habe, so wird

$$y^p = x^p z^q, \text{ und daher } x = y z^{-q:p}$$

sein. Da nun:

$$z^{r:p} = \frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}$$

ist, so erhält man hieraus, wenn man für x seinen Wert $yz^{-q:p}$ substituirt, die Gleichung:

$$z^{r:p} = \frac{ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \cdots}{A + By^\mu z^{-\mu q:p} + Cy^\nu z^{-\nu q:p} + \cdots}$$

oder:

$$Az^{r:p} + By^\mu z^{(r-\mu q):p} + Cy^\nu z^{(r-\nu q):p} + \cdots = ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \cdots$$

Multiplicirt man die letztere mit $z^{\alpha q:p}$, so geht sie über in:

$$Az^{(\alpha q + r):p} + By^\mu z^{(\alpha q - \mu q + r):p} + Cy^\nu z^{(\alpha q - \nu q + r):p} + \cdots$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha q - \beta q):p} + cy^\gamma z^{(\alpha q - \gamma q):p} + \cdots$$

Setzt man hierin:

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m; \quad \frac{\alpha q - \beta q}{p} = n, \text{ und } p = \alpha - \beta,$$

so wird:

$$q = n \text{ und } r = \alpha m - \beta m - \alpha n,$$

und es entsteht folgende Gleichung:

$$Az^m + By^\mu z^{m - \mu n:(\alpha - \beta)} + Cy^\nu z^{m - \nu n:(\alpha - \beta)} + \cdots$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^n + cy^\gamma z^{(\alpha - \gamma)n:(\alpha - \beta)} + \cdots$$

Aus dieser Gleichung erhält man also bei der Auflösung:

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{n}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}.$$

Oder man setze:

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m, \quad \frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n, \quad p = \mu,$$

so wird:

$$m - n = \mu \frac{q}{p} = q, \quad \frac{q}{p} = \frac{m - n}{\mu}, \quad \frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m - \alpha n}{\mu}, \quad r = \mu m - \alpha m + \alpha n,$$

und es entsteht die Gleichung:

$$Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{m - \nu(m-n):\mu} + \cdots = ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha-\beta)(m-n):\mu} + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)(m-n):\mu} + \cdots$$

Dies ist somit die Gleichung, welche bei der Auflösung giebt:

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \cdots}\right)^{\frac{m - n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}.$$

§ 54.

Wenn y und z durch die **Gleichung** $ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez = 0$ mit einander verbunden sind, so lässt sich sowohl y als z auf folgende Weise rational durch eine **neue** Veränderliche x **ausdrücken**:

Setzt man $y = xz$ und dividirt alsdann die Gleichung durch z, so wird dieselbe:

$$ax^2 z + bxz + cz + dx + e = 0,$$

und hieraus findet man:

$$z = \frac{-dx - e}{ax^2 + bx + c} \text{ und } y = \frac{-dx^2 - ex}{ax^2 + bx + c}.$$

Auf die gegebene Form lässt sich nun aber auch die Gleichung

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez + f = 0$$

bringen, indem man jede der beiden Veränderlichen um eine gewisse constante Grösse vermehrt oder vermindert. Es lässt sich demnach auch diese Gleichung mit Hülfe einer neuen Veränderlichen x durch rationale Ausdrücke auflösen.

§ 55.

Wenn y und z durch die **Gleichung** $ay^3 + by^2 z + cyz^2 + dz^3 + ey^2 + fyz + gz^2 = 0$ mit einander verbunden sind, so lässt sich sowohl y als z auf folgende Weise rational durch eine neue Veränderliche x **ausdrücken**:

Setzt man $y = xz$ und dividirt alsdann die ganze Gleichung durch z^2, so geht dieselbe über in:

$$ax^3 z + bx^2 z + cxz + dz + ex^2 + fx + g = 0.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{-ex^2 - fx - g}{ax^3 + bx^2 + cx + d} \text{ und } y = \frac{-ex^3 - fx^2 - gx}{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

Aus den angeführten Beispielen ist leicht ersichtlich, von welcher Beschaffenheit die Gleichungen höheren Grades zwischen y und z sein müssen, wenn dieselben in der beschriebenen Weise sollen aufgelöst werden können. Uebrigens sind die hierher gehörigen Fälle in den allgemeinen Formeln des § 53 enthalten. Da jedoch die Anwendung der allgemeinen Formeln auf solche öfters vorkommenden Fälle nicht ohne Schwierigkeiten ist, so schien es vorteilhafter, einige derselben besonders zu betrachten.

§ 56.

Wenn y und z durch die Gleichung $ay^2 + byz + cz^2 = d$ mit einander verbunden sind, so lässt sich y und z durch eine neue Veränderliche x wie folgt ausdrücken:

Setzt man $y = xz$, so wird:

$$(ax^2 + bx + c)\, z^2 = d,$$

folglich:

$$z = \sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}}$$

und

$$y = x\sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}}.$$

Ist ebenso:

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz,$$

so erhält man, wenn man $y = xz$ setzt und die ganze Gleichung durch z dividirt:

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\, z^2 = ex + f$$

und hieraus:

$$z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bx^2 + cx + d}}$$

und

$$y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bx^2 + cx + d}}.$$

Diese Fälle, sowie alle andern, welche eine ähnliche Auflösung zulassen, sind aber in dem allgemeinen Falle mit einbegriffen, welcher im folgenden Paragraphen behandelt werden wird.

§ 57.

Wenn y und z durch eine Gleichung von der Form:

$$ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \cdots = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \cdots$$

mit einander verbunden sind, so kann man zweckmässig y und z durch eine neue Veränderliche x in folgender Weise ausdrücken:

Setzt man $y = xz$ und dividirt man, falls der Exponent m grösser ist als n, die ganze Gleichung durch z^n, so erhält man:

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots)\, z^{m-n} = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \cdots,$$

und hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \cdots}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots}\right)^{1:(m-n)}$$

und

$$y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \cdots}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \cdots}\right)^{1:(m-n)}.$$

Diese Art der Auflösung findet nämlich allemal dann statt, wenn in der Gleichung zwischen y und z die Summe der Exponenten von y und z in jedem einzelnen Gliede nur entweder der einen oder der andern von zwei bestimmten Zahlen gleich ist. So ist in dem behandelten Falle diese Summe in den einzelnen Gliedern entweder gleich m oder gleich n.

§ 58.

Wenn sich in einer Gleichung zwischen y und z als Summen der Exponenten von y und z in den einzelnen Gliedern nur drei verschiedene Zahlen von der Art ergeben, dass die höchste unter ihnen die mittlere um ebensoviel übersteigt, wie diese die niedrigste, so lassen sich y und z mittelst einer quadratischen Gleichung durch eine neue Veränderliche x ausdrücken.

Setzt man nämlich $y = xz$ und dividirt alsdann die Gleichung durch die niedrigste Potenz von z, so ergiebt sich der Wert von z, in x ausgedrückt, durch Ausziehung einer Quadratwurzel. Dies wird aus den folgenden Beispielen klar werden:

Erstes Beispiel.

Ist

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = 2ey^2 + 2fyz + 2gz^2 + hy + iz,$$

so setze man $y = xz$ und dividire dann die Gleichung durch z. Dadurch erhält man:

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)z^2 = 2\,(ex^2 + fx + g)\, z + hx + i.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{ex^2 + fx + g \pm \sqrt{(ex^2 + fx + g)^2 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)(hx + i)}}{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

Nachdem z gefunden, wird $y = xz$.

Zweites Beispiel.

Ist

$$y^5 = 2az^3 + by + cz,$$

und setzt man $y = xz$, so wird:

$$x^5 z^4 = 2az^2 + bx + c.$$

Hieraus findet man:

$$z^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + bx^6 + cx^5}}{x^5}$$

und daher:

$$z = \frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bx^6 + cx^5}}}{x^2 \sqrt{x}} \text{ und } y = \frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bx^6 + cx^5}}}{x \sqrt{x}}.$$

Drittes Beispiel.

Es sei:

$$y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cz^4.$$

Hierin ergeben sich als Summen der Exponenten von y und z in den einzelnen Gliedern die Zahlen 10,7 und 4. Setzt man also $y = xz$ und dividirt durch z^4, so geht die Gleichung über in folgende:

$$x^{10} z^6 = 2axz^3 + bx + c \text{ oder: } z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}};$$

und hieraus findet man:

$$z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{a^2 + bx^9 + cx^8}}{x^{10}},$$

und demnach:

$$z = \frac{\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2 + bx^9 + cx^8}}}{x^3} \text{ und } y = \frac{\sqrt[3]{a \pm \sqrt{a^2 + bx^9 + cx^8}}}{x^2}.$$

Aus diesen Beispielen lässt sich der Nutzen derartiger Substitutionen zur Genüge erkennen.

4. Capitel.

Von der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen.

§ 59.

Da die gebrochenen und irrationalen Functionen von z nicht unter der Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ enthalten sind, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche ist, so pflegt man **ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke derselben Art** zu suchen, um den Wert irgend einer gebrochenen oder irrationalen Function darzustellen. *Ja es dürfte sogar die Natur transcendenter Functionen besser zu erkennen sein, sobald dieselben in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufenden Form ausgedrückt sind.**) Denn ebenso wie *die Natur einer ganzen Function am besten* dann *erkennbar* ist, *wenn sie nach Potenzen von z entwickelt, also* auf *die Form* $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ gebracht ist, *so ist auch* diese Form, selbst *wenn die Anzahl der Glieder unendlich gross* ist, *am geeignetsten, um sich von der eigentlichen Beschaffenheit aller anderen Functionen eine klare Vorstellung zu bilden.* Offenbar aber kann eine Function, welche nicht eine ganze Function ist, nicht durch eine endliche Anzahl von Gliedern wie $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ dargestellt werden, denn sonst wäre sie ja eben eine ganze Function.

Wenn jedoch einer Zweifel hegen sollte, ob eine solche Function durch eine unendliche Reihe von derartigen Gliedern darstellbar sei, so wird dieser Zweifel durch die wirkliche Entwickelung einer jeden Function beseitigt werden. *Damit sich* aber *die gegenwärtige Untersuchung auf ein möglichst weites Gebiet erstrecke,* sollen *ausser den Potenzen* von z *mit ganzen positiven Exponenten auch solche mit beliebigen Exponenten* zugelassen werden. Alsdann dürfte es zweifellos sein, dass sich jede Function von z in einen ins Unendliche fortlaufenden Ausdruck von der Form $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \cdots$, in welchem die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ irgend welche Zahlen bedeuten, verwandeln lässt.

*) Diese Stelle (u. d. Folg.) gewinnt angesichts der Entwickelung, welche die Funktionentheorie im XIX. Jahrhundert genommen hat, besonderes Interesse.
Anm. d. Uebers.

§ 60.

Es ist leicht ersichtlich, dass sich der Bruch $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ durch fortgesetzte Division in die unendliche Reihe:

$$\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta z}{\alpha^2}+\frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3}-\frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4}+\frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5}-\cdots$$

verwandeln lässt. Da hierin ein jedes Glied zu dem nächstfolgenden in dem constanten Verhältnis $-1:\frac{\beta z}{\alpha}$ steht, so heisst diese Reihe eine geometrische Reihe.

Man kann indessen diese Reihe auch so finden, dass man den Anfang derselben als unbekannt betrachtet, nämlich:

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$$

setzt, und nun die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ so zu bestimmen sucht, dass beide Seiten in der Tat gleich werden. Es wird hieraus:

$$a=(\alpha+\beta z)(A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots),$$

und wenn man die Multiplikation wirklich ausführt:

$$\begin{aligned} a = {} & \alpha A+\alpha Bz+\alpha Cz^2+\alpha Dz^3+\alpha Ez^4+\cdots \\ & +\beta Az+\beta Bz^2+\beta Cz^3+\beta Dz^4+\cdots \end{aligned}$$

Es muss daher $a=\alpha A$ oder $A=\frac{a}{\alpha}$, und ferner die Summe der Coefficienten einer jeden Potenz von z gleich 0 sein, so dass sich die Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \alpha B+\beta A &= 0 \\ \alpha C+\beta B &= 0 \\ \alpha D+\beta C &= 0 \\ \alpha E+\beta D &= 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Kennt man demnach irgend einen der Coefficienten, so findet man leicht den nächstfolgenden; denn ist der Coefficient irgend eines Gliedes gleich P, der des folgenden gleich Q, so ist $\alpha Q+\beta P=0$, also $Q=-\frac{\beta P}{\alpha}$. Da nun das erste Glied bereits bestimmt, nämlich $A=\frac{a}{\alpha}$ ist, so findet man für die folgenden Unbekannten $B, C, D, \ldots$ genau dieselben Werte, welche sich aus der Division ergaben. Uebrigens lehrt der blosse Anblick der für $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ gefundenen unendlichen Reihe, dass der Coefficient von z^n gleich $\pm\frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$ ist, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, oder mit andern Worten: Der Coefficient ist jederzeit gleich $\frac{a}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$.

§ 61.

Ebenso kann durch fortgesetzte Division die **gebrochene Function** $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden.

Da jedoch die Division ziemlich beschwerlich ist, und überdies die eigentliche Natur der unendlichen Reihe sich nicht so leicht daraus erkennen lässt, so ist es vorteilhafter, die gesuchte Reihe zunächst willkürlich anzunehmen und sie dann auf die soeben beschriebene Art zu bestimmen. Es sei also:

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\alpha+\beta z+\gamma z^2$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} a+bz = {} & \alpha A+\alpha Bz+\alpha Cz^2+\alpha Dz^3+\alpha Ez^4+\cdots \\ & +\beta Az+\beta Bz^2+\beta Cz^3+\beta Dz^4+\cdots \\ & +\gamma Az^2+\gamma Bz^3+\gamma Cz^4+\cdots \end{aligned}$$

Hieraus erhält man $\alpha A=a$ und $\alpha B+\beta A=b$ oder $A=\frac{a}{\alpha}$ und $B=\frac{b}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha^2}$, während sich die übrigen Unbekannten aus den folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha C+\beta B+\gamma A &= 0 \\ \alpha D+\beta C+\gamma B &= 0 \\ \alpha E+\beta D+\gamma C &= 0 \\ \alpha F+\beta E+\gamma D &= 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es wird also aus je zwei benachbarten Coefficienten der nächstfolgende bestimmt; denn sind P, Q, R drei aufeinanderfolgende Coefficienten, so wird:

$$\alpha R+\beta Q+\gamma P=0 \quad\text{oder}\quad R=\frac{-\beta Q-\gamma P}{\alpha}.$$

Da nun die beiden ersten Coefficienten A und B bereits gefunden sind, so kann man aus ihnen der Reihe nach auch die andern $C, D, E, F, \ldots$ finden und somit die Reihe $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$ aufstellen, welche der gegebenen gebrochenen Function $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ gleich ist.

Beispiel.

Wäre z. B. der Bruch

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$$

gegeben, und setzte man dafür die Reihe an:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots,$$

so erhielte man, da hier

$$a = 1,\ b = 2,\ \alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -1$$

ist,

$$A = 1,\ B = 3$$

und ferner:

$$\begin{aligned} C &= B + A \\ D &= C + B \\ E &= D + C \\ F &= E + D \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ist daher jeder Coefficient gleich der Summe der beiden vorhergehenden. Sind demnach zwei benachbarte Coefficienten P und Q bekannt, so ist der nächstfolgende $R = P + Q$. Da man die beiden ersten Coefficienten A und B kennt, so verwandelt sich der gegebene Bruch

$$\frac{1 + 2z}{1 - z - z^2}$$

in die unendliche Reihe:

$$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots,$$

welche man leicht beliebig weit fortsetzen kann.

§ 62.

Hieraus erkennt man schon zur Genüge das **Wesen derjenigen unendlichen Reihen,** in welche sich die **gebrochenen Functionen verwandeln lassen. Sie befolgen nämlich das Gesetz, dass sich jedes Glied aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden bestimmen lässt.** Ist nämlich $\alpha + \beta z$ der Nenner des gegebenen Bruches und setzt man dafür die unendliche Reihe an:

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \cdots,$$

so bestimmt sich ein beliebiger Coefficient Q nur allein aus dem einen unmittelbar vorhergehenden P, und zwar ist $\alpha Q + \beta P = 0$. Ist aber der Nenner ein dreigliedriger Ausdruck $\alpha + \beta z + \gamma z^2$, so bestimmt sich irgend ein Coefficient R der Reihe aus den beiden unmittelbar vorhergehenden P und Q mittelst der Gleichung $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$.

Ebenso bestimmt sich, wenn der Nenner aus vier Gliedern besteht, also gleich $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ ist, irgend ein Coefficient S der Reihe aus den drei vorhergehenden P, Q, R mittelst der Gleichung $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0$ u. s. f. Es wird daher bei derartigen Reihen jedes Glied aus einer gewissen

Anzahl der vorhergehenden nach einem bestimmten unveränderlichen Gesetz gefunden, und zwar ist dieses Gesetz unmittelbar aus dem Nenner des die Reihe liefernden Bruches zu ersehen. Solche Reihen nennt man gewöhnlich nach Moivre, der sich zuerst eingehend mit ihnen beschäftigte, **rekurrente** Reihen, weil man bei ihnen auf die vorhergehenden Glieder zurückgehen muss, wenn man die folgenden bestimmen will.

§ 63.

Um solche Reihen zu erhalten, ist es aber notwendig, **dass das constante Glied des Nenners nicht gleich 0 sei.** Denn wäre dies der Fall, so würde ja, da $A = \frac{a}{\alpha}$ ist, sowohl A, als alle übrigen Glieder unendlich werden. Schliesst man diesen Fall, der später betrachtet werden soll, aus, so wird die in eine unendliche rekurrente Reihe zu verwandelnde Function die Gestalt haben:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}.$$

Dabei ist das constante Glied des Nenners gleich 1 gesetzt, da sich, falls dieses Glied nicht gleich 0 ist, der Bruch immer in dieser Form schreiben lässt, und ferner sind die übrigen Glieder des Nenners mit dem negativen Zeichen versehen, damit alle Glieder der daraus entstehenden Reihe das positive Vorzeichen erhalten. Setzt man nun für die aus jener Function hervorgehende Reihe die folgende an:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots,$$

so bestimmen sich die einzelnen Coefficienten aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= \alpha A + b \\ C &= \alpha B + \beta A + c \\ D &= \alpha C + \beta B + \gamma A + d \\ E &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ist daher jeder Coefficient gleich einem Aggregat aus Vielfachen einer gewissen Anzahl der vorhergehenden Coefficienten, vermehrt noch um eine gewisse Zahl, die aus dem Zähler hinzutritt. Wofern aber der Zähler nicht etwa in's Unendliche fortschreitet, hört dieses Hinzutreten einer Zahl aus dem Zähler bald auf, und es bestimmt sich alsdann jedes Glied aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden nach einem unveränderlichen Gesetze. Damit jedoch dieses Fortschreitungsgesetz an keiner Stelle eine Unterbrechung erleide, muss man eine echte gebrochene Function nehmen. Denn nimmt man einen unechten Bruch, so hat man den in ihm enthaltenen ganzen Teil noch zur Reihe hinzuzufügen, wodurch das Fortschreitungsgesetz bei denjenigen Gliedern, welche durch diese Hinzufügung eine Vermehrung oder Verminderung erfahren haben, unterbrochen wird. So giebt z. B. der unechte Bruch $\frac{1+2z-z^3}{1-z-z^2}$ die folgende Reihe:

$$1 + 3z + 4z^2 + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 + \cdots$$

In dieser aber macht das Glied $6z^3$ eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jeder Coefficient gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist.

§ 64.

Eine besondere Betrachtung verdienen diejenigen rekurrenten Reihen, welche aus **Brüchen** entspringen, deren **Nenner** eine **Potenz** ist. So geht z. B. aus dem Bruche:

$$\frac{a+bz}{(1-\alpha z)^2}$$

die folgende Reihe hervor:

$$\begin{aligned} a &+ 2\alpha a z + 3\alpha^2 a z^2 + 4\alpha^3 a z^3 + 5\alpha^4 a z^4 + \cdots \\ &+ \quad bz + \;2\alpha b z^2 + 3\alpha^2 b z^3 + 4\alpha^3 b z^4 + \cdots, \end{aligned}$$

in welcher der Coefficient von z^n gleich $(n+1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b$ ist. Es ist jedoch auch diese Reihe eine rekurrente, weil jedes Glied aus den beiden vorhergehenden gebildet wird, und zwar ergiebt sich das Gesetz, nach welchem diese Bildung erfolgt, sehr leicht, wenn man den Nenner in $1 - 2\alpha z + \alpha^2 z^2$ auflöst. Setzt man $\alpha = 1$ und $z = 1$, so geht die Reihe in die allgemeine arithmetische Progression:

$$a + (2a+b) + (3a+2b) + (4a+3b) + \cdots$$

über, in welcher die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Glieder constant sind. Folglich ist jede arithmetische Progression eine rekurrente Reihe; denn ist $A+B+C+D+E+F+\ldots$ eine arithmetische Progression, so ist:

$$C = 2B - A, \quad D = 2C - B, \quad E = 2D - C \text{ u. s. w.}$$

§ 65.

Ferner lässt sich der **Bruch**:

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-\alpha z)^3},$$

da:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^3} = (1-\alpha z)^{-3} = 1 + 3\alpha z + 6\alpha^2 z^2 + 10\alpha^3 z^3 + 15\alpha^4 z^4 + \cdots$$

ist, in folgende unendliche Reihe verwandeln:

$$\begin{aligned} a &+ 3\alpha a z + 6\alpha^2 a z^2 + 10\alpha^3 a z^3 + 15\alpha^4 a z^4 + \cdots \\ &+ \quad bz + 3\alpha b z^2 + 6\alpha^2 b z^3 + 10\alpha^3 b z^4 + \cdots \\ &+ \qquad\quad cz^2 + 3\alpha c z^3 + 6\alpha^2 c z^4 + \cdots \end{aligned}$$

In dieser Reihe besitzt die Potenz z^n den Coefficienten:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\alpha^n a + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\alpha^{n-2} c.$$

Setzt man aber $\alpha = 1$ und $z = 1$, so geht die Reihe über in die allgemeine Progression zweiter Ordnung, bei welcher die zweiten Differenzen aufeinanderfolgender Glieder constant sind. Bezeichnet

$$A + B + C + D + E + \cdots$$

eine solche Progression, so ist dieselbe zugleich eine rekurrente Reihe, in welcher sich jedes Glied aus den drei vorhergehenden wie folgt bestimmt:

$$D = 3C - 3B + A, \quad E = 3D - 3C + B, \quad F = 3E - 3D + C, \ldots$$

Da nun bei einer arithmetischen Progression erster Ordnung auch die zweiten Differenzen aufeinanderfolgender Glieder constant, nämlich gleich 0 sind, so kommt die erwähnte Eigenschaft auch den arithmetischen Progressionen erster Ordnung zu.

§ 66.

Ebenso ergiebt der **Bruch**

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-\alpha z)^4}$$

eine unendliche Reihe, in welcher die Potenz z^n den Coefficienten besitzt

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3} d.$$

Setzt man daher $\alpha = 1$ und $z = 1$, so umfasst diese Reihe alle arithmetischen Reihen dritter Ordnung, bei welchen die dritten Differenzen aufeinanderfolgender Glieder constant sind. Es werden somit alle Progressionen dieser Ordnung zugleich rekurrente Reihen sein, welche aus dem Nenner $1 - 4z + 6z^2 - 4z^3 + z^4$ entspringen. Ist z. B.

$$A + B + C + D + E + F + \cdots$$

eine solche, so ist:

$$E = 4D - 6C + 4B - A, \quad F = 4E - 6D + 4C - B \text{ u. s. w.},$$

und diese letztere Eigenschaft kommt zugleich allen Progressionen der niedrigeren Ordnungen zu.

§ 67.

Auf diese Weise lässt sich zeigen, dass **jede algebraische Progression** irgend welcher Ordnung, welche schliesslich auf constante Differenzen führt, eine **rekurrente Reihe** ist, deren Gesetz sich aus dem Nenner $(1-z)^n$ bestimmt, wenn n eine Zahl ist, welche grösser ist als die, welche die Ordnung der Progression angiebt. Da also:

$$a^m + (a+b)^m + (a+2b)^m + (a+3b)^m + \cdots$$

eine Progression $m$ter Ordnung darstellt, so folgt aus der Natur der rekurrenten Reihen:

$$0 = a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a+2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+3b)^m + \cdots$$
$$\pm \frac{n}{1}(a+(n-1)b)^m \mp (a+nb)^m,$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, und zwar ist diese Gleichung stets richtig, sobald die ganze Zahl n grösser ist als m. Hieraus lässt sich beurteilen, von welchem Umfange die Lehre von den rekurrenten Reihen ist.

§ 68.

Wenn der **Nenner** nicht die Potenz eines Binoms, sondern die **Potenz eines Polynoms** ist, so lässt sich die Natur der Reihe auch auf eine andere Art erklären. Ist nämlich die gegebene gebrochene Function:

$$\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots)^{m+1}},$$

so ist die daraus entstehende unendliche Reihe:

$$\begin{aligned}1 + \frac{m+1}{1}\alpha z &+ \frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \cdots\\ &+ \frac{m+1}{1}\beta z^2 \quad + \frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 \quad + \cdots\\ &\qquad\qquad + \frac{m+1}{1}\gamma z^3 \quad + \cdots\\ &\qquad\qquad + \cdots\cdots\end{aligned}$$

Um in die Natur dieser Reihe eine bessere Einsicht zu erlangen, stelle man sie durch allgemeine Buchstaben wie folgt dar:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots$$

Hierbei wird jeder Coefficient N aus so viel vorhergehenden, als Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ vorkommen, in der Weise bestimmt, dass

$$N = \frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta J + \cdots$$

ist. Obwohl nun hier das Fortschreitungsgesetz nicht ein unveränderliches

ist, sondern von dem Exponenten der betreffenden Potenz von z abhängt, so kommt der Reihe doch ein anderes unveränderliches Fortschreitungsgesetz zu, welches man aus dem entwickelten Nenner ableiten kann, und das der Natur der rekurrenten Reihen entspricht. Jenes oben angeführte veränderliche Gesetz findet aber nur so lange statt, als der Zähler des Bruches gleich der Einheit, oder gleich einer constanten Zahlgrösse ist. Enthielte derselbe ebenfalls noch gewisse Potenzen von z, so würde jenes Gesetz weit verwickelter werden, was nach der Entwickelung der Anfangsgründe der Differentialrechnung leichter zu erkennen sein wird.

§ 69.

Bisher haben wir angenommen, dass das erste constante Glied des Nenners nicht gleich 0 sei, weshalb wir dasselbe gleich 1 setzen konnten. Jetzt wollen wir zusehen, was für Reihen entstehen, **wenn das constante Glied des Nenners verschwindet**. Es wird alsdann die gebrochene Function die Form haben:

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z(1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)}.$$

Lässt man zunächst den Factor z des Nenners weg und verwandelt dann den übrig bleibenden Bruch:

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\cdots}$$

in die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots,$$

so ist offenbar:

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z(1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \cdots$$

Ebenso wird:

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z^2(1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + C + Dz + Ez^2 + \cdots$$

und allgemein, welche Zahl der Exponent m auch sein möge:

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z^m(1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)} = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{C}{z^{m-2}} + \frac{D}{z^{m-3}} + \cdots$$

§ 70.

Da man für z durch Substitution eine andere Veränderliche x einführen, und demnach die gebrochene Function auf unzählig viele Arten umformen kann, so kann die gebrochene Function auch auf **unendlich viele Arten durch rekurrente Reihen** dargestellt werden. Ist z. B. der Bruch:

$$y = \frac{1+z}{1-z-z^2},$$

und die ihm gleiche rekurrente Reihe:

$$y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \cdots$$

gegeben, und setzt man $z = \frac{1}{x}$, so wird:

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 1} = \frac{-x(1+x)}{1 + x - x^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1+x}{1+x-x^2} = 1 + 0 \cdot x + x^2 - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 - \cdots,$$

folglich auch:

$$y = -x + 0 \cdot x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 + \cdots$$

Oder setzt man $z = \frac{1-x}{1+x}$, so wird:

$$y = \frac{-2-2x}{1-4x-x^2},$$

und hieraus:

$$y = -2 - 10x - 42x^2 - 178x^3 - 754x^4 - \cdots$$

Derartige rekurrente Reihen lassen sich für y unzählig viele finden.

§ 71.

Die **irrationalen Functionen** entwickelt man gewöhnlich mit Hülfe der Formel:

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \cdots$$

in unendliche Reihen; es laufen nämlich in der Tat die Glieder bis ins Unendliche fort, wofern nicht etwa $\frac{m}{n}$ eine ganze positive Zahl ist. So erhält man z. B., wenn man für m und n bestimmte Zahlen setzt, die Reihen:

$$(P+Q)^{\frac12} = P^{\frac12} + \frac12 P^{-\frac12} Q - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} P^{-\frac32} Q^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac52} Q^3 - \cdots$$

$$(P+Q)^{-\frac12} = P^{-\frac12} - \frac12 P^{-\frac32} Q + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P^{-\frac52} Q^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac72} Q^3 + \cdots$$

$$(P+Q)^{\frac13} = P^{\frac13} + \frac13 P^{-\frac23} Q - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} P^{-\frac53} Q^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac83} Q^3 - \cdots$$

$$(P+Q)^{-\frac13} = P^{-\frac13} - \frac13 P^{-\frac43} Q + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} P^{-\frac73} Q^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{10}{3}} Q^3 + \cdots$$

$$(P+Q)^{\frac23} = P^{\frac23} + \frac23 P^{-\frac13} Q - \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} P^{-\frac43} Q^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac73} Q^3 - \cdots$$

u. s. w.

§ 72.

Die Glieder solcher Reihen schreiten also in der Weise fort, dass man ein jedes aus dem unmittelbar vorhergehenden erhält. Ist nämlich irgend ein Glied der Reihe, welche aus $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ entsteht, gleich

$$MP^{\frac{m-kn}{n}} Q^k,$$

so ist das nächstfolgende gleich

$$\frac{m-kn}{(k+1)n} MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}} Q^{k+1}.$$

Es ist also zu beachten, dass bei jedem folgenden Gliede der Exponent von P um 1 abnimmt, während der Exponent von Q um 1 wächst. Um dies bequemer auf einzelne Fälle anwenden zu können, schreiben wir $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ in der Form $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; dies ist erlaubt, da die Entwickelung von $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ mit $P^{\frac{m}{n}}$ multiplicirt dieselbe Reihe wie vorher ergiebt. Ferner können wir, wenn wir m nicht bloss ganze Zahlen, sondern jeden beliebigen Bruch bedeuten lassen, n geradezu der Einheit gleichsetzen. Schreibt man endlich für $\frac{Q}{P}$, welches als Function von z betrachtet wird, den Buchstaben Z, so hat man:

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1} Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Z^3 + \cdots$$

Wir wollen jedoch, um im Folgenden die Fortschreitungsgesetze besser übersehen zu können, die allgemeine Formel auch in der Form uns merken:

$$(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Z^3 + \cdots$$

§ 73.

Es sei also zunächst $Z = \alpha z$; dann ist:

$$(1+\alpha z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} \alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 z^3 + \cdots$$

Schreibt man diese Reihe in der allgemeinen Form:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

so bestimmt sich jeder Coefficient N aus dem vorhergehenden M mittelst der Gleichung:

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M.$$

Für $n=1$ ist $M=1$, und daher:

$$N = A = \frac{m-1}{1}\alpha.$$

Für $n=2$ ist $M = A = \frac{m-1}{1}\alpha$, und daher:

$$N = B = \frac{m-2}{2}\alpha M = \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2;$$

ebenso ferner:

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3,$$

u. s. w. übereinstimmend mit der vorher gefundenen Reihe.

§ 74.

Ist:

$$Z = \alpha z + \beta z^2,$$

so wird:

$$(1+\alpha z+\beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2)^2 + \cdots,$$

und wenn man diese Reihe nach Potenzen von z ordnet:

$$(1+\alpha z+\beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \cdots + \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + \cdots$$

Schreibt man diese Reihe in der allgemeinen Form:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

so bestimmt sich jeder Coefficient aus den beiden vorhergehenden mittelst der Gleichung:

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L,$$

so dass alle Glieder aus dem ersten, welches gleich 1 ist, gefunden werden können.

Es wird nämlich:

$$A = \frac{m-1}{1}\alpha$$

$$B = \frac{m-2}{2}\alpha A + \frac{2m-2}{2}\beta$$

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B + \frac{2m-3}{3}\beta A$$

$$D = \frac{m-4}{4}\alpha C + \frac{2m-4}{4}\beta B$$

u. s. w.

§ 75.

Ist:

$$Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3,$$

so wird:

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^2 + \cdots,$$

oder wenn man diese Reihe nach den Potenzen von z ordnet:

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \cdots$$

$$+ \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + \cdots$$

$$+ \frac{m-1}{1}\gamma z^3 + \cdots$$

Schreibt man diese Reihe, um das Fortschreitungsgesetz besser hervortreten zu lassen, in der allgemeinen Form:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

so bestimmt sich jeder Coefficient aus den drei vorhergehenden mittelst der Gleichung:

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L + \frac{3m-n}{n}\gamma K.$$

Da nun das erste Glied gleich 1 und die vorhergehenden gleich 0 sind, so folgt:

$$A = \frac{m-1}{1}\alpha$$
$$B = \frac{m-2}{2}\alpha A + \frac{2m-2}{2}\beta$$
$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B + \frac{2m-3}{3}\beta A + \frac{3m-3}{3}\gamma$$
$$D = \frac{m-4}{4}\alpha C + \frac{2m-4}{4}\beta B + \frac{3m-4}{4}\gamma A$$
$$E = \frac{m-5}{5}\alpha D + \frac{2m-5}{5}\beta C + \frac{3m-5}{5}\gamma B$$

u. s. w.

§ 76.

Setzt man daher allgemein:

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\cdots)^{m-1} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \cdots$$

so bestimmen sich die einzelnen Glieder dieser Reihe aus den vorhergehenden in folgender Weise:

$$A = \frac{m-1}{1}\alpha$$
$$B = \frac{m-2}{2}\alpha A + \frac{2m-2}{2}\beta$$
$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B + \frac{2m-3}{3}\beta A + \frac{3m-3}{3}\gamma$$
$$D = \frac{m-4}{4}\alpha C + \frac{2m-4}{4}\beta B + \frac{3m-4}{4}\gamma A + \frac{4m-4}{4}\delta$$
$$E = \frac{m-5}{5}\alpha D + \frac{2m-5}{5}\beta C + \frac{3m-5}{5}\gamma B + \frac{4m-5}{5}\delta A + \frac{5m-5}{5}\varepsilon$$

u. s. w.

Ein jedes Glied nämlich bestimmt sich durch ebenso viele der vorhergehenden, als Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ in der Function von z enthalten sind, deren Potenz in eine Reihe entwickelt wird. Uebrigens stimmt dieses Gesetz mit dem des § 68, wo wir die analoge Form $(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\cdots)^{-m}$ in eine unendliche Reihe entwickelten, überein. Denn setzt man hier $-m$ für m, und nimmt man die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ negativ, so ergiebt sich dieselbe Reihe, wie dort. Indessen ist hier nicht der Ort, um durch allgemeine Schlüsse zu zeigen, warum ein solches Fortschreitungsgesetz stattfindet, da dies erst nach Entwickelung der Prinzipien der Differentialrechnung in einfacher Weise geschehen kann. Inzwischen wird es genügen, sich von der Richtigkeit desselben durch die Anwendung auf Beispiele jeglicher Art überzeugt zu haben.

5. Capitel.

Von den Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen.

§ 77.

Bisher haben wir zwar auch schon mehrere veränderliche Zahlgrössen betrachtet, dieselben waren jedoch so beschaffen, dass sie sämtlich Functionen einer einzigen unter ihnen waren, und dass somit, wenn diese eine einen bestimmten Wert erhielt, die übrigen dadurch mitbestimmt wurden. Jetzt dagegen werden wir **veränderliche Zahlgrössen** betrachten, welche **von einander nicht abhängen**, so dass, wenn auch der einen von ihnen ein bestimmter Wert beigelegt wird, die andern nichtsdestoweniger unbestimmt und veränderlich bleiben. Derartige veränderliche Zahlgrössen, z. B. x, y, z, stimmen also hinsichtlich ihrer Bedeutung mit einander überein, da eine jede derselben alle bestimmten Werte unter sich begreift; trotzdem aber findet zwischen ihnen, wenn man sie mit einander vergleicht, die grösste Verschiedenheit statt, indem, wenn auch die eine z einen bestimmten Wert erhält, die übrigen x und y sich noch ebenso weit erstrecken, wie vorher. Der Unterschied zwischen von einander abhängigen und von einander unabhängigen veränderlichen Zahlgrössen besteht also darin, dass bei jenen das Bestimmtwerden der einen zugleich das aller übrigen nach sich zieht, während bei diesen das Bestimmtwerden der einen auf die Bedeutung der übrigen nicht den geringsten Einfluss hat.

§ 78.

Eine Function von **zwei** oder **mehreren** Veränderlichen x, y, z ist also **ein Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus diesen Grössen zusammengesetzt ist.

So ist z. B. der Ausdruck $x^3 + xyz + az^2$ eine Function der drei veränderlichen Zahlgrössen x, y, z, und diese Function bleibt, wenn man eine dieser Grössen, etwa z, als bestimmt ansieht, d. h. einen festen Zahlwert für sie setzt, immer noch eine veränderliche Zahlgrösse, nämlich eine Function von x und y. Ja selbst wenn ausser z auch noch y bestimmt wird, bleibt sie noch immer Function von x. Eine solche Function mehrerer Veränderlichen erhält daher nicht eher einen bestimmten Wert, als bis die einzelnen veränderlichen Zahlgrössen bestimmt sind. Da nun eine einzige veränderliche Zahlgrösse auf unendlich viele Arten bestimmt werden kann, so muss eine Function von zwei Veränderlichen, da sie für jeden bestimmten Wert der einen derselben immer noch unendlich viele Werte annehmen kann, auf unendlichmal unendlichviele Arten bestimmt werden können. Bei einer Function von drei Veränderlichen aber ist die Anzahl der Werte, welche sie annehmen kann, wieder noch unendlich vielmal grösser, und so wächst diese Anzahl weiter bei mehreren Veränderlichen.

§ 79.

Die Functionen **mehrerer Veränderlichen** teilt man ebenso wie die Functionen einer einzigen Veränderlichen sehr passend in **algebraische** und **transcendente** ein.

Unter jenen versteht man solche, zu deren Bildung nur algebraische Operationen erforderlich sind, unter diesen aber solche, in denen auch transcendente Operationen vorkommen. Bei letzteren können wieder mehrere Arten unterschieden werden, je nachdem die transcendenten Operationen entweder auf alle veränderlichen Zahlgrössen, oder auf einen Teil derselben, oder nur auf eine einzige sich beziehen. So ist zwar der Ausdruck $z^2 + y \log z$, weil darin der Logarithmus von z vorkommt, eine transcendente Function von y und z; man wird sie aber deshalb für transcendent in geringerem Masse halten, weil nach der Bestimmung von z eine algebraische Function von y übrig bleibt. Indessen hat es keinen Nutzen, durch derartige Unterabteilungen die Untersuchung weitläufiger zu machen.

§ 80.

Die algebraischen Functionen werden in rationale und irrationale, die rationalen ihrerseits wieder in ganze und gebrochene eingeteilt.

Was man für Functionen unter diesen Bezeichnungen zu verstehen habe, ist bereits aus dem ersten Capitel hinreichend ersichtlich. Eine Function ist nämlich rational, wenn in ihr die veränderlichen Zahlgrössen, von denen sie eine Function ist, nicht unter einem Wurzelzeichen vorkommen, und eine solche ist ferner ganz, wenn sie keine Brüche enthält, in deren Nennern die veränderlichen Zahlgrössen auftreten; im entgegengesetzten Falle heisst sie gebrochen. Es ist daher:

$$\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \varepsilon yz + \zeta z^2 + \eta y^3 + \vartheta y^2 z + \iota yz^2 + \varkappa z^3 + \cdots$$

die allgemeine Form einer ganzen Function der beiden veränderlichen Zahlgrössen y und z, und somit, wenn P und Q zwei solche ganze Functionen von zwei oder mehreren Veränderlichen bezeichnen, $\frac{P}{Q}$ die allgemeine Form der gebrochenen Functionen. Eine irrationale Function ferner ist entweder entwickelt oder unentwickelt. Unter der ersteren versteht man eine solche, welche durch Wurzelgrössen bereits vollständig dargestellt ist, die letztere dagegen wird durch eine noch nicht aufgelöste Gleichung gegeben. So ist z. B. V eine unentwickelte irrationale Function von y und z, wenn die Gleichung:

$$V^5 = (ayz + z^3)\,V^2 + (y^4 + z^4)\,V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$$

besteht.

§ 81.

Ferner wird die **Vieldeutigkeit** bei diesen Functionen in derselben Weise definirt wie bei denen, die nur von einer einzigen Veränderlichen abhängen.

So sind die rationalen Functionen eindeutig, weil sie für bestimmte Werte der einzelnen veränderlichen Zahlgrössen stets nur einen bestimmten Wert geben. Bezeichnen ferner $P, Q, R, S\ldots$ rationale oder eindeutige Functionen von x, y, z, so ist V eine zweideutige Function derselben Veränderlichen, wenn

$$V^2 - PV + Q = 0$$

ist; denn es besitzt die Function V, wenn man den Grössen x, y, z irgend welche bestimmten Werte zuerteilt, stets nicht nur einen, sondern zwei bestimmte Werte. Ebenso ist die Function V, wenn

$$V^3 - PV^2 + QV - R = 0$$

ist, eine dreideutige, und wenn

$$V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0,$$

eine vierdeutige Function. Aehnlich verhält es sich mit den übrigen mehrdeutigen Functionen.

§ 82.

Ebenso wie, wenn man eine Function der einen Veränderlichen z gleich 0 setzt, dadurch die veränderliche Zahlgrösse z entweder nur einen einzigen oder mehrere bestimmte Werte erhält, so wird auch, wenn man eine Function der beiden Veränderlichen y und z gleich 0 setzt, die eine dieser Veränderlichen durch die andere bestimmt, und daher eine Function derselben, obgleich sie vorher nicht von einander abhingen. Ebenso wird, wenn man eine Function von drei Veränderlichen x, y, z gleich 0 setzt, die eine der drei Veränderlichen durch die beiden andern bestimmt, und demnach eine Function derselben. Dasselbe ist der Fall, wenn man eine Function nicht der 0, sondern einer constanten Zahlgrösse, oder irgend einer andern Function gleichsetzt, denn aus **jeder Gleichung wird**, so viel Veränderliche darin auch vorkommen mögen, doch immer **die eine der Veränderlichen durch die übrigen bestimmt**, und demnach Function derselben. Ferner lassen sich aus **zwei verschiedenen Gleichungen** zwischen denselben Veränderlichen immer **zwei der Veränderlichen durch die übrigen bestimmen** u. s. f.

§ 83.

Besonders beachtenswert ist aber die Einteilung der Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen in **homogene** und **heterogene**.

Homogen heisst eine Function, wenn in ihr sämtliche Glieder von einer und derselben Dimension sind, heterogen dagegen, wenn dies nicht der Fall ist. Es wird dabei aber eine jede Veränderliche für eine Dimension, das Quadrat davon oder das Product aus zweien für zwei, das Product aus drei Veränderlichen, sie mögen nun einander gleich oder verschieden sein, für drei Dimensionen u. s. w. gerechnet, während die constanten Grössen bei der Abzählung der Dimensionen nicht in Betracht kommen. So sagt man, es seien die Ausdrücke αy, βz von einer, αy^2, βyz, γz^2 von zwei, αy^3, $\beta y^2 z$, $\gamma y z^2$, δz^3 von drei, αy^4, $\beta y^3 z$, $\gamma y^2 z^2$, $\delta y z^3$, εz^4 von vier Dimensionen u. s. f.

§ 84.

Wir wollen diese Einteilung zunächst auf die ganzen Functionen anwenden, und dabei annehmen, dass dieselben nur zwei Veränderliche enthalten, da sich die Sache bei mehreren Veränderlichen ganz ebenso verhält.

Eine ganze Function ist also **homogen**, wenn in ihr die einzelnen Glieder alle von derselben Dimension sind.

Man teilt daher solche Functionen am passendsten wieder nach der Anzahl der Dimensionen ihrer Glieder ein. So sind

$$\begin{aligned}
&\alpha y + \beta z \\
&\alpha y^2 + \beta y z + \gamma z^2 \\
&\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3 \\
&\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta y z^3 + \varepsilon z^4 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

bezüglich die allgemeinen Formen der ganzen homogenen Functionen von einer, zwei, drei, vier u.s.w. Dimensionen. Analog hierzu wird daher eine constante Zahlgrösse α für sich allein von gar keiner Dimension sein.

§ 85.

Eine **gebrochene** Function ferner ist **homogen**, wenn Zähler und Nenner derselben homogene Functionen sind.

So ist der Bruch $\frac{ay^2 + bz^2}{\alpha y + \beta z}$ eine homogene Function von y und z. Die Anzahl der Dimensionen bei derartigen Functionen findet man aber, wenn man die Anzahl der Dimensionen des Nenners von der des Zählers subtrahirt. Es ist daher der angeführte Bruch von einer Dimension, dagegen der Bruch $\frac{y^5 + z^5}{y^2 + z^2}$ eine Function von drei Dimensionen. Sobald also der Nenner von derselben Dimension ist, wie der Zähler, so ist der Bruch eine homogene Function von gar keiner Dimension, was z. B. bei dem Bruche $\frac{y^3 + z^3}{y^2 z}$ oder bei den folgenden $\frac{y}{z}$, $\frac{\alpha z^2}{y^2}$, $\frac{\beta y^3}{z^3}$ der Fall ist. Ist aber der Nenner von einer höheren Dimension als der Zähler, so ist die Zahl, welche die Dimension des Bruches angiebt, negativ. So ist $\frac{y}{z^2}$ eine Function von -1, $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ eine solche von -3, $\frac{1}{y^5 + ayz^4}$ eine Function von -5 Dimensionen, da im letzteren Beispiele der Zähler von keiner Dimension ist. Uebrigens ist sofort ersichtlich, dass, wenn man mehrere homogene Functionen von einer und derselben Dimension zu einander addirt oder von einander subtrahirt, man ebenfalls wieder eine homogene Function von derselben Dimension erhält. So stellt der Ausdruck

$$\alpha y + \frac{\beta z^2}{y} + \frac{\gamma y^4 - \delta z^4}{y^2 z + y z^2}.$$

eine Function von einer, und

$$\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z^2}{y^2} + \frac{y^2 + z^2}{y^2 - z^2}$$

eine solche von keiner Dimension dar.

§ 86.

Auch auf **irrationale** Functionen lässt sich der Begriff der **Homogeneität** ausdehnen. Ist nämlich P irgend eine homogene Function von n Dimensionen, so ist $\sqrt{P}$ von $\frac{n}{2}$, $\sqrt[3]{P}$ von $\frac{n}{3}$ und allgemein $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ von $\frac{\mu}{\nu} n$ Dimensionen. Es sind also z. B.:

$$\sqrt{y^2 + z^2},\ \sqrt[3]{y^9 + z^9},\ (yz + z^2)^{\frac{3}{4}},\ \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{y^4 + z^4}}$$

Functionen bezüglich von einer, von drei, von $\frac{3}{2}$ und von keiner Dimension. Verbindet man dies mit dem Vorhergehenden, so sieht man, dass der Ausdruck:

$$\frac{1}{y} + \frac{y\sqrt{y^2 + z^2}}{z^3} - \frac{y}{\sqrt[3]{y^6 - z^6}} + \frac{y\sqrt{z}}{z^2\sqrt{y} + \sqrt{y^5 + z^5}}$$

eine homogene Function von -1 Dimension ist.

§ 87.

Hiernach lässt sich leicht beurteilen, ob eine implicite irrationale Function homogen ist oder nicht. Es sei z. B. V eine solche implicite Function, und

$$V^3 + PV^2 + QV + R = 0,$$

wobei P, Q, R Functionen von y und z sind. Dann ist zunächst klar, dass V nur dann eine homogene Function sein kann, wenn P, Q, R homogene Functionen sind. Nehmen wir ferner an, V sei von n Dimensionen, so ist V^2 eine Function von $2n$ und V^3 eine solche von $3n$ Dimensionen. Damit also in den einzelnen Gliedern die Zahl der Dimensionen dieselbe sei, muss notwendig P eine Function von n, Q eine von $2n$ und R eine von $3n$ Dimensionen sein. Umgekehrt aber kann man, wenn P, Q, R homogene Functionen respective von $n, 2n, 3n$ Dimensionen sind, schliessen, dass V eine homogene Function von n Dimensionen ist. Ist z. B.

$$V^5 + (y^4 + z^4) V^3 + ay^8 V - z^{10} = 0,$$

so ist V eine homogene Function von y und z von zwei Dimensionen.

§ 88.

Ist V eine homogene Function von y und z von n Dimensionen, und setzt man in ihr überall $y = uz$, so verwandelt sich V in das Product aus der Potenz z^n und einer gewissen Function der Veränderlichen u.

Durch diese Substitution $y = uz$ tritt nämlich zu jedem einzelnen Gliede dieselbe Potenz von z noch hinzu, in welcher vorher y darin vorkam. Da nun in jedem einzelnen Gliede die Anzahl der Dimensionen von y und z zusammengenommen gleich der Zahl n war, so wird jetzt die Veränderliche z für sich allein überall in der $n$ten Dimension auftreten, d. h. es wird überall die Potenz z^n vorkommen. Es wird somit die Function V durch die Potenz z^n teilbar, und der Quotient wird eine Function sein, welche nur noch die eine Veränderliche u enthält.

Dies ist zunächst klar bei den ganzen Functionen; denn ist:

$$V = ay^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3,$$

so wird, wenn $y = uz$ gesetzt wird,

$$V = z^3(au^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta).$$

Dasselbe gilt aber auch von den Brüchen; denn ist z. B.

$$V = \frac{\alpha y + \beta z}{y^2 + z^2},$$

also V eine homogene Function von -1 Dimension, so wird dadurch, dass man $y = uz$ setzt,

$$V = z^{-1} \cdot \frac{\alpha u + \beta}{u^2 + 1}.$$

Endlich findet hiervon auch bei den irrationalen Functionen keine Ausnahme statt. Denn ist z. B.

$$V = \frac{y + \sqrt{y^2 + z^2}}{z\sqrt{y^3 + z^3}},$$

welcher Ausdruck von $-\frac{3}{2}$ Dimensionen ist, so wird für $y = uz$:

$$V = z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{u + \sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{u^3 + 1}}.$$

Auf diese Weise lassen sich also die homogenen Functionen von nur zwei Veränderlichen auf Functionen einer einzigen Veränderlichen zurückführen, da die Potenz von z, weil sie als Factor auftritt, auf die Function von u keinen Einfluss ausübt.

§ 89.

Wenn daher V eine homogene Function zweier Veränderlichen y und z von keiner Dimension ist, so kann man sie dadurch, dass man $y = uz$ setzt, in eine blosse Function einer einzigen Veränderlichen u verwandeln.

Denn da die Anzahl der Dimensionen gleich 0 ist, so ist die Potenz von z, mit welcher die Function von u multiplicirt werden müsste, $z^0 = 1$. Es verschwindet also in diesem Falle die Veränderliche z vollständig aus der Rechnung. So entsteht, wenn

$$V = \frac{y + z}{y - z}$$

ist und $y = uz$ gesetzt wird,

$$V = \frac{u + 1}{u - 1},$$

und ist die Function irrational und z. B.

$$V = \frac{y - \sqrt{y^2 + z^2}}{z},$$

so wird für $y = uz$:

$$V = u - \sqrt{u^2 + 1}.$$

§ 90.

Eine ganze homogene Function zweier Veränderlichen y und z lässt sich in so viele einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ zerlegen, als die Anzahl ihrer Dimensionen angiebt.

Denn da die Function homogen ist, so geht sie, wenn man $y = uz$ setzt, über in das Product aus z^n und einer gewissen ganzen Function von u, welche letztere demnach in einfache Factoren von der Form $\alpha u + \beta$ zerlegt werden kann. Multiplicirt man sodann jeden einzelnen Factor mit z, so wird jeder derselben von der Form $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$, da $uz = y$ ist. Wegen des Factors z^n giebt es aber gerade so viele Factoren von dieser Form, als der Exponent n Einheiten enthält. Diese einfachen Factoren können jedoch sowohl reell als imaginär sein, d. h. es können die Coefficienten α und β zum Teil reell, zum Teil imaginär sein.

Hieraus folgt also, dass die Function von zwei Dimensionen: $ay^2 + byz + cz^2$ zwei einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ besitzt; ebenso hat die Function $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$ drei einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$, und analog verhält es sich mit den ganzen homogenen Functionen von noch mehr Dimensionen.

§ 91.

So wie also der Ausdruck $\alpha y + \beta z$ die allgemeine Form der ganzen (homogenen) Functionen von einer Dimension darstellt, so ist $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$ die allgemeine Form der ganzen (homogenen) Functionen von zwei Dimensionen. Ebenso sind in der Form $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\varepsilon y + \zeta z)$ alle ganzen (homogenen) Functionen von drei Dimensionen enthalten, und so können sämtliche ganzen homogenen Functionen als Producte von so vielen Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ dargestellt werden, als die Anzahl ihrer Dimensionen angiebt. Diese Factoren werden aber genau ebenso mittelst der Auflösung der Gleichungen gefunden, wie wir oben die einfachen Factoren der ganzen Functionen von nur einer Veränderlichen finden lehrten. Uebrigens lässt sich diese Eigenschaft der homogenen Functionen von zwei Veränderlichen nicht ausdehnen auf die homogenen Functionen von drei oder mehr Veränderlichen. Denn die allgemeine Form einer solchen Function von nur zwei Dimensionen, nämlich: $ay^2 + byz + cyx + dxz + ex^2 + fz^2$ lässt sich im allgemeinen nicht auf ein Product von der Form $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \varepsilon z + \zeta x)$ zurückführen, und noch viel weniger ist dies bei Functionen von noch mehr Dimensionen der Fall.

§ 92.

Aus dem, was wir über die homogenen Functionen gesagt haben, erhellt zugleich, was man unter einer heterogenen Function zu verstehen hat. Es ist dies nämlich eine Function, deren einzelne Glieder nicht alle von derselben Dimension sind. Man kann aber die heterogenen Functionen darnach einteilen, dass man angiebt, wie viele verschiedene Zahlen bei ihnen als Dimensionszahlen der einzelnen Glieder vorkommen. So heisst eine Function zweiteilig, wenn in ihr nur Glieder von zwei verschiedenen Dimensionen auftreten; eine solche Function wird daher das Aggregat zweier homogener Functionen von verschiedener Dimension sein. Z. B. ist $y^5 + 2y^3z^2 + y^2 + z^2$ eine zweiteilige Function, weil ihre Glieder zum Teil von fünf, zum Teil von zwei Dimensionen sind. Ferner ist eine Function dreiteilig, wenn in ihr nur Glieder von drei verschiedenen Dimensionen vorkommen, oder wenn sie in drei homogene Functionen zerteilt werden kann, wie z. B. $y^6 + y^3z^2 + z^4 + y - z$.

Ausserdem aber giebt es noch gebrochene und irrationale heterogene Functionen, die so vermischt sind, dass sie nicht in homogene Functionen zerteilt werden können, z. B. $\dfrac{y^3 + ayz}{by + z^2}$, oder $\dfrac{a + \sqrt{y^2 + z^2}}{y^2 - bz}$.

§ 93.

Zuweilen lässt sich auch eine heterogene Function dadurch, dass man für die eine oder auch für beide Veränderlichen eine passende Substitution einführt, auf eine homogene zurückführen; indessen ist es nicht leicht anzugeben, in welchem Falle dies möglich ist. Es mag daher genügen, einige Beispiele anzuführen, bei denen eine solche Reduction stattfindet. Ist z. B. die Function

$$y^5 + z^2y + y^3z + \frac{z^3}{y}$$

gegeben, so sieht man bald, dass dieselbe homogen wird, wenn man $z = x^2$ setzt; denn dadurch verwandelt sie sich in:

$$y^5 + x^4y + y^3x^2 + \frac{x^6}{y},$$

also in eine homogene Function von x und y von fünf Dimensionen. Ferner wird die Function

$$y + y^2x + y^3x^2 + y^5x^4 + \frac{a}{x}$$

dadurch auf eine homogene Form gebracht, dass man $x = \frac{1}{z}$ setzt; denn dadurch geht sie in die Function von einer Dimension:

$$y + \frac{y^2}{z} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{y^5}{z^4} + az$$

über. Weit mehr Schwierigkeiten aber bieten die Fälle, bei denen man nicht durch eine so einfache Substitution die homogene Form herstellen kann.

§ 94.

Endlich verdient noch die sehr gebräuchliche Einteilung der ganzen Functionen **nach ihrer Ordnung** hervorgehoben zu werden, nach welcher sich die Ordnung einer Function durch die höchste derjenigen Zahlen bestimmt, welche die Dimensionen der einzelnen Glieder angeben. So ist z. B.:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ay - a^2$$

eine Function zweiter Ordnung, weil die Glieder höchster Dimension von zwei Dimensionen sind. Ferner gehört

$$y^4 + yz^3 - ay^2z + abyz - a^2y^2 + b^4$$

zu den Functionen der vierten Ordnung. Diese Einteilung der Functionen ist besonders wichtig für die Lehre von den krummen Linien; ebendaher stammt auch noch die im folgenden Paragraphen zu erwähnende Einteilung der ganzen Functionen.

§ 95.

Es bleibt nämlich noch die Einteilung der ganzen Functionen in **zusammengesetzte** und **nichtzusammengesetzte** übrig. Eine Function heisst zusammengesetzt, wenn sie in rationale Factoren zerlegt werden kann, oder wenn sie das Product aus zwei oder mehreren rationalen Functionen ist. Eine solche Function ist z. B.

$$y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byz^2 - a^2z^2 + 2abzy - b^2y^2,$$

da sie gleich dem Producte aus den zwei Functionen

$$(y^2 + z^2 - az + by)\,(y^2 - z^2 + az - by)$$

ist. Nach dem Obigen ist daher jede ganze homogene Function von nur zwei Veränderlichen eine zusammengesetzte Function, da sie stets in so viele einfache Factoren von der Form $\alpha y + \beta z$ zerlegt werden kann, als die Anzahl ihrer Dimensionen beträgt. Eine ganze Function heisst aber nichtzusammengesetzt, wenn sie auf keinerlei Weise in rationale Factoren zerlegbar ist. Eine solche Function ist z. B.

$$y^2 + z^2 - a^2,$$

bei welcher offenbar eine Zerlegung in rationale Factoren nicht möglich ist. Durch Aufsuchung der Teiler einer Function erkennt man, ob dieselbe zusammengesetzt ist oder nicht.

6. Capitel.

Von den Exponentialgrössen und den Logarithmen.

§ 96.

Obgleich die **transcendenten** Functionen erst in der Integralrechnung genauer zu untersuchen sein werden, wollen wir doch, bevor wir dazu gelangen, einige besonders oft vorkommende und zu vielen Untersuchungen den Weg bahnende Arten derselben schon jetzt betrachten. Dahin gehören zunächst die **Exponentialgrössen** oder die Potenzen, deren **Exponent** eine **veränderliche** Zahlgrösse ist. Offenbar nämlich können derartige Zahlgrössen nicht zu den algebraischen Functionen gerechnet werden, da in diesen nur constante Exponenten vorkommen dürfen. Es giebt aber verschiedene Arten von Exponentialgrössen, je nachdem der Exponent für sich allein oder auch noch die zur Potenz erhobene Zahlgrösse veränderlich ist. Zur ersteren Art gehört a^z, zur letzteren y^z; ausserdem aber kann der Exponent selbst wieder eine Exponentialgrösse sein, wie in a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Indessen wollen wir uns bei der weiteren Einteilung dieser Grössen nicht länger aufhalten, da man ihre Beschaffenheit hinlänglich klar zu erkennen im Stande ist, wenn man nur die erste Art a^z genauer untersucht hat.

§ 97.

Es sei also eine solche Exponentialgrösse a^z, d. h. eine Potenz der constanten Zahlgrösse a mit dem veränderlichen Exponenten z gegeben. Da der Exponent z alle möglichen bestimmten Werte unter sich begreift, so ist zunächst klar, dass, wenn man an Stelle von z nach und nach alle ganzen positiven Zahlen setzt, dadurch die bestimmten Werte a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 u. s. w. hervorgehen werden. Setzt man aber der Reihe nach für z die negativen ganzen Zahlen -1, -2, -3 u. s. w., so erhält man $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ u. s. w., und für $z = 0$ wird $a^0 = 1$. Lässt man z einen

Bruch wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ u. s. w. bedeuten, so ergeben sich die Werte $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ u. s. w. Obwohl diese an und für sich betrachtet zwei oder mehrere Werte annehmen, weil die Wurzelausziehung stets mehrdeutige Functionen liefert, so lässt man doch an diesem Orte gewöhnlich nur die Hauptwerte, d. h. die reellen und positiven Werte, gelten, weil man die Grösse a^z in gewissem Sinne als eine eindeutige Function ansieht. So nimmt $a^{\frac{5}{2}}$ zwischen a^2 und a^3 gewissermassen einen mittleren Platz ein und ist demgemäss eine Grösse derselben Art. Obwohl daher $a^{\frac{5}{2}}$ an und für sich ebensowohl gleich $-a^2\sqrt{a}$ als gleich $+a^2\sqrt{a}$ sein kann, so kommt hier doch nur der letztere Wert dafür in Betracht. Ebenso verhält sich die Sache, wenn der Exponent z irrationale Werte annimmt. Denn da es in einem solchen Falle schwer sein würde, sich die Anzahl der darin enthaltenen Werte vorzustellen, so betrachtet man nur den einen reellen Wert davon. Es besitzt also $a^{\sqrt{7}}$ einen bestimmten Wert, der zwischen den Grenzen a^2 und a^3 liegt.

§ 98.

Hauptsächlich hängen aber die Werte der Exponentialgrösse a^z von der Grösse der constanten Zahl a ab. Ist nämlich $a = 1$, so ist stets $a^z = 1$, welchen Wert auch der Exponent z haben möge. Ist aber $a > 1$, so wird der Wert von a^z um so grösser, je grösser die Zahl ist, die man für z setzt, bis er für $z = \infty$ ebenfalls unendlich gross wird. Für $z = 0$ wird $a^z = 1$, und ist $z < 0$, so werden die Werte von a^z kleiner als 1, bis für $z = -\infty$ $a^z = 0$ wird. Gerade das Umgekehrte findet statt, wenn $a < 1$, aber immer noch positiv ist; dann nehmen nämlich die Werte von a^z ab, während z über 0 hinaus wächst, und sie nehmen zu, wenn für z negative Zahlen gesetzt werden. Denn ist $a < 1$, so ist $\frac{1}{a} > 1$. Setzt man daher $\frac{1}{a} = b$, so wird $a^z = b^{-z}$, wonach man den letzteren Fall nach dem ersteren beurteilen kann.

§ 99.

Ist $a = 0$, so findet sich zwischen den Werten von a^z ein sehr grosser Sprung. So lange nämlich z eine positive Zahl und grösser wie 0 ist, ist beständig $a^z = 0$; ist $z = 0$, so wird $a^0 = 1$; ist aber z eine negative Zahl, so erhält a^z einen unendlich grossen Wert. Denn ist z. B. $z = -3$, so wird $a^z = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$, also unendlich gross. Noch viel grössere Sprünge aber kommen vor, wenn die constante Zahlgrösse a einen negativen Wert, z. B. den Wert -2 hat. Denn setzt man dann für z ganze Zahlen, so werden die Werte von a^z abwechselnd positiv und negativ, wie aus der Reihe ersichtlich ist:

$$a^{-4}, \quad a^{-3}, \quad a^{-2}, \quad a^{-1}, \quad a^0, \quad a^1, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4 \text{ u. s. w.}$$
$$+\frac{1}{16}, \quad -\frac{1}{8}, \quad +\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad 1, \quad -2, \quad +4, \quad -8, \quad +16 \text{ u. s. w.}$$

Ausserdem aber werden, wenn man dem Exponenten z gebrochene Werte giebt, die Potenzen $a^z = (-2)^z$ bald reelle, bald imaginäre Werte besitzen. So wird z. B. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ imaginär, während $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ reell ist. Ob aber die Potenz a^z, sobald der Exponent z irrationale Werte erhält, reelle oder imaginäre Werte liefert, lässt sich überhaupt gar nicht bestimmen.

§ 100.

Der angeführten Unbequemlichkeiten bei negativen Werten von a halber wollen wir voraussetzen, dass a eine positive Zahl und grösser als 1 sei, da sich auf diesen Fall der andere, wo a eine positive Zahl, aber kleiner als 1 ist, leicht zurückführen lässt. Setzt man dann $a^z = y$, und nimmt man für z alle reellen Werte, welche zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ liegen, so wird y alle positiven zwischen den Grenzen $+\infty$ und 0 enthaltenen Werte annehmen. Denn für $z = \infty$ ist $y = \infty$, für $z = 0$ ist $y = 1$, und für $z = -\infty$ ist $y = 0$. Umgekehrt giebt es zu jedem beliebigen positiven Werte von y immer auch einen reellen Wert von z von der Beschaffenheit, dass $a^z = y$ ist. Dagegen kann der Exponent z keinen reellen Wert besitzen, wenn y einen negativen Wert hat.

§ 101.

Wenn also $y = a^z$ ist, so ist y eine gewisse Function von z, und es lässt sich aus der Natur der Potenzen leicht absehen, in welcher Weise y von z abhängt, da man daraus, welchen Wert man auch z geben möge, den zugehörigen Wert von y bestimmen kann. Es ist aber $y^2 = a^{2z}$, $y^3 = a^{3z}$, und allgemein $y^n = a^{nz}$, woraus folgt, dass $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$, $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z}$, $\frac{1}{y} = a^{-z}$, $\frac{1}{y^2} = a^{-2z}$, $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$ u. s. w. ist. Ausserdem wird, wenn $v = a^x$ ist, $vy = a^{x+z}$ und $\frac{v}{y} = a^{x-z}$. Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich der Wert von y, der zu einem gegebenen Werte von z gehört, noch weit leichter finden.

Beispiel.

Ist z. B. $a = 10$, so kennt man aus unserm dekadischen Zahlensystem ohne Weiteres die Werte von y, welche zu ganzzahligen Werten von z gehören; denn es ist $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, ferner $10^0 = 1$ und $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$, $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$, $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Setzt man aber für z einen Bruch, so findet man den Wert von y durch Wurzelausziehung. So ist z. B. $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162277$ u. s. w.

§ 102.

Ebenso aber, wie bei gegebenem Werte von a zu jedem Werte von z der entsprechende Wert von y gefunden werden kann, lässt sich auch umgekehrt zu jedem gegebenen positiven Werte von y der Wert von z angeben, für welchen $a^z = y$ ist. Dieser Wert von z heisst, insofern er als Function von y betrachtet wird, der **Logarithmus** von y. Es setzt daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer bestimmten constanten Zahl a voraus, welche deshalb die Basis der Logarithmen genannt wird. Ist diese angenommen, so ist der Logarithmus irgend einer Zahl y der Exponent einer Potenz a^z von der Beschaffenheit, dass $a^z = y$ ist, und diesen Logarithmus der Zahl y bezeichnet man gewöhnlich durch $\log y$. Ist somit $a^z = y$, so ist $z = \log y$. Hieraus geht hervor, dass die Basis der Logarithmen, obwohl sie im Uebrigen willkürlich angenommen werden darf, doch eine Zahl sein muss, die grösser als 1 ist, und dass somit nur die Logarithmen der positiven Zahlen reelle Zahlgrössen sind.

§ 103.

Welche Zahl man aber auch als **Basis** a der Logarithmen nehmen möge, so ist immer $\log 1 = 0$. Denn setzt man in der Gleichung $a^z = y$ oder, was dasselbe ist, in $z = \log y$, $y = 1$, so wird $z = 0$. Ferner sind die Logarithmen von Zahlen, welche grösser sind als 1, positiv und hängen ab von dem Werte der Basis a. So ist $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$. Hiernach kann man rückwärts schliessen, dass, welche Zahl auch als Basis genommen sein möge, diejenige Zahl die Basis der Logarithmen sein werde, deren Logarithmus gleich 1 ist. Die Logarithmen der positiven Zahlen aber, welche kleiner als 1 sind, sind negativ; denn es ist $\log\frac{1}{a} = -1$, $\log\frac{1}{a^2} = -2$, $\log\frac{1}{a^3} = -3$ u. s. w. Endlich sind die Logarithmen der negativen Zahlen, wie bereits bemerkt, nicht reell, sondern imaginär.

§ 104.

Ebenso wird, wenn $\log y = z$ ist, $\log y^2 = 2z$, $\log y^3 = 3z$ und allgemein $\log y^n = nz$, oder da $z = \log y$ ist,

$$\log y^n = n \log y.$$

Man findet daher den **Logarithmus** irgend **einer Potenz** von y, indem man den Logarithmus von y mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. So ist z. B.

$$\log\sqrt{y} = \frac{1}{2}\log y,\quad \log\frac{1}{\sqrt{y}} = \log y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log y \quad \text{u. s. w.},$$

und es können somit aus dem gegebenen Logarithmus irgend einer Zahl die Logarithmen aller ihrer Potenzen gefunden werden. Sind aber bereits zwei Logarithmen gefunden, z. B. $\log y = z$ und $\log v = x$, so dass also $a^z = y$ und $a^x = v$ ist, so wird

$$\log(vy) = x + z = \log v + \log y,$$

und es ist somit der **Logarithmus des Products** zweier Zahlen gleich der Summe der Logarithmen der Factoren. Ebenso ist:

$$\log\frac{y}{v} = z - x = \log y - \log x,$$

d. h. man findet den **Logarithmus eines Bruches**, indem man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahirt. Diese Regeln dienen dazu, um aus einigen schon bekannten Logarithmen die Logarithmen noch vieler anderer Zahlen zu finden.

§ 105.

Hieraus folgt aber auch, dass es ausser den Logarithmen der Potenzen der Basis a keine rationalen Logarithmen weiter giebt; denn es lässt sich der Logarithmus einer Zahl b nur dann durch eine rationale Zahl darstellen, wenn b eine Potenz der Basis a ist. Der Logarithmus von b kann aber auch keine irrationale Zahl sein; denn wäre $\log b = \sqrt{n}$, so müsste $a^{\sqrt{n}} = b$ sein, was unmöglich ist, wenn die Zahlen a und b als rational vorausgesetzt werden. Man pflegt aber eben nur die Logarithmen der rationalen und ganzen Zahlen zu suchen, da man aus diesen die Logarithmen der Brüche und der irrationalen Zahlen finden kann. Da sich somit die Logarithmen der Zahlen, welche nicht gerade Potenzen der Basis a sind, weder rational noch irrational darstellen lassen, so rechnet man dieselben mit Recht zu den transcendenten Grössen, daher man denn auch gewöhnlich die Logarithmen überhaupt den transcendenten Grössen zuzählt.

§ 106.

Aus diesem Grunde können die Logarithmen der Zahlen auch nur **annäherungsweise** durch **Decimalbrüche** dargestellt werden, die aber um so weniger von dem wahren Werte abweichen werden, auf je mehr Stellen man sie berechnet, und zwar kann man auf folgende Weise nur allein durch Ausziehung der Quadratwurzel den Logarithmus einer jeden Zahl mit grosser Annäherung bestimmen. Da nämlich, wenn $\log y = z$ und $\log v = x$ gesetzt wird, $\log\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$ ist, so suche man, wenn die gegebene Zahl b zwischen den Grenzen a^2 und a^3, deren Logarithmen 2 und 3 sind, enthalten ist, den Wert von $a^{2\frac{1}{2}}$ oder $a^2\sqrt{a}$. Alsdann liegt b entweder zwischen den Grenzen a^2 und $a^2\sqrt{a}$, oder zwischen $a^2\sqrt{a}$ und a^3. Welches von beiden auch der Fall sein möge, man erhält, indem man wieder zwischen den beiden Grenzen die mittlere Proportionalzahl aufsucht, zwei neue sich enger anschliessende Grenzen und kann dann, auf diesem Wege fortfahrend, zu Grenzen gelangen, welche um weniger als eine gegebene Zahlgrösse von einander abweichen, und die man daher ohne merklichen Fehler für die gegebene Zahlgrösse b nehmen kann. Da man nun aber die Logarithmen der einzelnen Grenzen leicht finden kann, so kann auch der Logarithmus der Zahl b gefunden werden.

Beispiel.

Man setze, wie es in den gewöhnlichen Tafeln zu geschehen pflegt, die logarithmische Basis $a = 10$ und suche den Logarithmus der Zahl 5 näherungsweise zu bestimmen. Da diese Zahl zwischen den Grenzen 1 und 10, deren Logarithmen 0 und 1 sind, liegt, so hat man auf folgende Weise eine Reihe von Quadratwurzeln auszuziehen, bis man zu Grenzen kommt, die von der gegebenen Zahl 5 nicht mehr verschieden sind:

		Es sei:
$A = 1{,}000000$,	$\log A = 0{,}0000000$.	$C = \sqrt{AB}$
$B = 10{,}000000$,	$\log B = 1{,}0000000$.	$D = \sqrt{BC}$
$C = 3{,}162277$,	$\log C = 0{,}5000000$.	$E = \sqrt{CD}$
$D = 5{,}623413$,	$\log D = 0{,}7500000$.	$F = \sqrt{DE}$
$E = 4{,}216964$,	$\log E = 0{,}6250000$.	$G = \sqrt{DF}$
$F = 4{,}869674$,	$\log F = 0{,}6875000$.	$H = \sqrt{FG}$
$G = 5{,}232991$,	$\log G = 0{,}7187500$.	$J = \sqrt{FH}$
$H = 5{,}048065$,	$\log H = 0{,}7031250$.	$K = \sqrt{HJ}$
$J = 4{,}958069$,	$\log J = 0{,}6953125$.	$L = \sqrt{JK}$
$K = 5{,}002865$,	$\log K = 0{,}6992187$.	$M = \sqrt{KL}$
$L = 4{,}980416$,	$\log L = 0{,}6972656$.	$N = \sqrt{KM}$
$M = 4{,}991627$,	$\log M = 0{,}6982421$.	$O = \sqrt{KN}$
$N = 4{,}997242$,	$\log N = 0{,}6987304$.	$P = \sqrt{NO}$
$O = 5{,}000052$,	$\log O = 0{,}6989745$.	$Q = \sqrt{OP}$
$P = 4{,}998647$,	$\log P = 0{,}6988525$.	$R = \sqrt{OQ}$
$Q = 4{,}999350$,	$\log Q = 0{,}6989135$.	$S = \sqrt{OR}$
$R = 4{,}999701$,	$\log R = 0{,}6989440$.	$T = \sqrt{OS}$
$S = 4{,}999876$,	$\log S = 0{,}6989592$.	$V = \sqrt{OT}$
$T = 4{,}999963$,	$\log T = 0{,}6989668$.	$W = \sqrt{TV}$
$V = 5{,}000008$,	$\log V = 0{,}6989707$.	$X = \sqrt{VW}$
$W = 4{,}999984$,	$\log W = 0{,}6989687$.	$Y = \sqrt{VX}$
$X = 4{,}999997$,	$\log X = 0{,}6989697$.	$Z = \sqrt{XY}$
$Y = 5{,}000003$,	$\log Y = 0{,}6989702$.	
$Z = 5{,}000000$,	$\log Z = 0{,}6989700$.	

Auf diese Weise sind wir also, indem wir nur immer die mittlere Proportionalzahl suchten, zur Zahl $Z = 5{,}000000$ gelangt, und es ist daher der gesuchte Logarithmus der Zahl 5 gleich 0,6989700, wenn als Basis der Logarithmen die Zahl $a = 10$ genommen wird. Es ist somit annähernd $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. Briggs und Vlacq haben auf diese Weise in der Tat das gemeine Logarithmensystem berechnet; jedoch hat man später weit bequemere Hülfsmittel entdeckt, um die Logarithmen auf viel kürzerem Wege zu bestimmen.

§ 107.

Es giebt demnach so viel verschiedene **Logarithmensysteme**, als man verschiedene Zahlen für die Basis a nehmen kann, und es ist somit die Zahl der logarithmischen Systeme unendlich gross. Indessen haben die Logarithmen derselben Zahl in zwei verschiedenen Systemen stets unter einander dasselbe Verhältnis. Ist nämlich die Basis des einen Systems gleich a, die des andern gleich b, und ist der Logarithmus der Zahl n in jenem Systeme gleich p, in diesem gleich q, so ist $a^p = n$ und $b^q = n$, folglich $a^p = b^q$, und daher $a = b^{\frac{q}{p}}$. Es muss daher der Bruch $\frac{q}{p}$ einen constanten Wert behalten, welche Zahl man auch für n nehmen möge. Hat man daher für ein einziges System die Logarithmen aller Zahlen berechnet, so lassen sich daraus sehr leicht die Logarithmen für jedes andere System nach der Regeldetri finden. So können, wenn die Logarithmen für die Basis 10 bekannt sind, daraus die Logarithmen für jede andere Basis, z. B. für die Basis 2, berechnet werden. Es möge z. B. der Logarithmus der Zahl n für die Basis 2 gesucht werden, wenn der Logarithmus der Zahl n für die Basis 10 gleich p ist. Da nun für die Basis $10 : \log 2 = 0{,}3010300$, und für die Basis $2 : \log 2 = 1$ ist, so wird:

$$0{,}3010300 : 1 = p : q$$

und daher

$$q = \frac{p}{0{,}3010300} = 3{,}3219277 \cdot p.$$

Multiplicirt man somit alle gemeinen Logarithmen mit der Zahl 3,3219277, so erhält man die Tafel der Logarithmen für die Basis 2.

§ 108.

Hieraus folgt, dass die Logarithmen zweier Zahlen in jedem beliebigen Systeme dasselbe Verhältnis zu einander haben.

Sind nämlich M und N zwei Zahlen, deren Logarithmen für die Basis a m und n seien, so ist $M = a^m$, $N = a^n$, folglich $a^{mn} = M^n = N^m$, und daher $M = N^{\frac{m}{n}}$. Da in dieser Gleichung die Basis a nicht mehr vorkommt, so ist offenbar der Wert des Bruches $\frac{m}{n}$ von der Basis a unabhängig. Denn sind für eine andere Basis b die Logarithmen derselben Zahlen M und N bezüglich μ und ν, so ist auf gleiche Weise $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$ und daher $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$, folglich $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$, oder $m : n = \mu : \nu$. So haben wir bereits gesehen, dass in jedem Logarithmensysteme die Logarithmen der verschiedenen Potenzen von y z. B. y^m und y^n in dem Verhältnis ihrer Exponenten $m : n$ stehen (§ 104).

§ 109.

Um also ein **Logarithmensystem** für irgend eine Basis a **zu verfertigen**, genügt es, nur die Logarithmen der Primzahlen auf die vorher beschriebene Weise oder auf irgend einem anderen bequemeren Wege zu berechnen. Denn da der Logarithmus einer zusammengesetzten Zahl gleich ist der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren, so lassen sich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch blosse Addition finden. So wird, wenn man die Logarithmen von 3 und 5 kennt, $\log 15 = \log 3 + \log 5$, $\log 45 = 2 \log 3 + \log 5$, und da wir oben für die Basis $a = 10 : \log 5 = 0{,}6989700$ gefunden haben, ausserdem aber $\log 10 = 1$ ist, so wird $\log \frac{10}{5} = \log 2 = \log 10 - \log 5$, und somit $\log 2 = 1 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300$. Sind aber so die Logarithmen der Primzahlen 2 und 5 gefunden, so findet man auch die Logarithmen aller Zahlen, welche aus 2 und 5 zusammengesetzt sind, z. B. von 4, 8, 16, 32, 64 u. s. w., 20, 40, 80, 25, 50 u. s. w.

§ 110.

Die **Logarithmentafeln** sind aber bei numerischen Rechnungen von ausserordentlichem Nutzen, weil man aus ihnen nicht nur den Logarithmus einer gegebenen Zahl, sondern auch zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl finden kann. Bezeichnen z. B. c, d, e, f, g, h irgend welche Zahlen, so kann man den Wert des Ausdruckes

$$\frac{c^2 d \sqrt{e}}{f \sqrt[3]{gh}}$$

ohne alle Multiplication finden; denn es ist der Logarithmus dieses Ausdrucks gleich

$$2 \log c + \log d + \frac{1}{2} \log e - \log f - \frac{1}{3} \log g - \frac{1}{3} \log h,$$

und hieraus erhält man den gesuchten Wert, wenn man die Zahl aufsucht, welche zu diesem Logarithmus gehört. Vorzüglichen Nutzen aber gewähren die Logarithmen, wenn es sich darum handelt, sehr hohe und schwierige Potenzerhebungen oder Wurzelausziehungen auszuführen, da durch die Anwendung der Logarithmen diese Operationen in einfache Multiplicationen und Divisionen verwandelt werden.

Erstes Beispiel.

Sucht man etwa den Wert der Potenz $2^{\frac{7}{12}}$, so hat man, da der Logarithmus davon gleich $\frac{7}{12} \log 2$ ist, den Logarithmus von 2, nämlich 0,3010300 mit $\frac{7}{12}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ zu multipliciren, wodurch man $\log 2^{\frac{7}{12}} = 0{,}1756008$ erhält. Diesem Logarithmus entspricht die Zahl 1,498307, welche somit den Wert von $2^{\frac{7}{12}}$ näherungsweise darstellt.

Zweites Beispiel.

Wenn die Zahl der Einwohner eines Landes sich jährlich um den dreissigsten Teil vermehrte, und dieselbe anfänglich 100000 Menschen betragen hätte, wie gross würde alsdann die Bevölkerung nach 100 Jahren sein?

Wird der Kürze wegen die ursprüngliche Einwohnerzahl gleich n gesetzt, so dass $n = 100000$ ist, so ist dieselbe nach Ablauf eines Jahres gleich $\left(1 + \frac{1}{30}\right) n = \frac{31}{30} n$, nach zwei Jahren gleich $\left(\frac{31}{30}\right)^2 n$, nach drei Jahren gleich $\left(\frac{31}{30}\right)^3 n$, endlich nach hundert Jahren gleich $\left(\frac{31}{30}\right)^{100} n$. Der Logarithmus dieser Zahl ist gleich $100 \cdot \log \frac{31}{30} + \log 100000$. Da nun aber $\log \frac{31}{30} = \log 31 - \log 30 = 0{,}014240439$, also $100 \log \frac{31}{30} = 1{,}4240439$ und ferner $\log 100000 = 5$ ist, so wird der Logarithmus der gesuchten Einwohnerzahl gleich 6,4240439, und somit diese selbst gleich 2654874 sein. Nach Verlauf von hundert Jahren würde also die Bevölkerung des Landes mehr denn $26\frac{1}{2}$mal so stark wie am Anfang sein.

Drittes Beispiel.

Wenn nach der Sündflut das menschliche Geschlecht von 6 Personen fortgepflanzt worden wäre, und man annimmt, dass nach 200 Jahren die Zahl der Menschen bereits auf 1000000 angewachsen wäre, um den wievielsten Teil müsste sich alsdann die Zahl der Menschen jährlich vermehrt haben?

Nimmt man an, dass zu jener Zeit die Zahl der Menschen jährlich um den $x$ten Teil gewachsen sei, so müsste sie nach 200 Jahren notwendig $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \cdot 6$ Mann betragen haben, und da diese Zahl gleich 1000000 sein sollte, so folgt $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$. Es ist daher $\log \frac{1+x}{x} = \frac{1}{200} \log \frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \cdot 5{,}2218487 = 0{,}0261092$, folglich $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$ oder $1000000 = 61963 x$. Hieraus ergiebt sich ungefähr $x = 16$. Es würde also, um die anfängliche Zahl der Menschen zu einer so grossen Menge anwachsen zu lassen, genügt haben, wenn sich die

Menschenzahl jährlich um den 16ten Teil vermehrt hätte. Diese Zahl darf wegen des hohen Alters, das man den ersten Menschen beilegt, als nicht zu hoch angesehen werden. Hätten sich jedoch die Menschen noch weitere zweihundert Jahre in demselben Masse vermehrt, so hätte ihre Zahl auf $1000000 \cdot \frac{1000000}{6} = 166666666666$ steigen müssen, eine Menge, zu deren Unterhaltung der ganze Erdboden nicht ausreichend gewesen wäre.

Viertes Beispiel.

Die jährliche Vermehrung der Menschen zu finden, wenn sich deren Anzahl alle hundert Jahre verdoppelt.

Wenn man die jährliche Zunahme der Menschenzahl gleich $\frac{1}{x}$ und die anfängliche Menschenmenge gleich n setzt, so ist dieselbe nach 100 Jahren gleich $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$ und, da diese gleich $2n$ sein soll, so muss $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$ oder $\log \frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} \log 2 = 0{,}0030103$ sein. Hieraus ergiebt sich $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$, und somit $x = \frac{10000000}{69555} = 144$ ungefähr. Es hätte sich daher die Zahl der Menschen jährlich um den 144ten Teil vermehren müssen, und es sind somit die Einwürfe derjenigen Leute recht lächerlich, welche nicht zugeben wollen, dass die ganze Erde von einem Menschenpaare aus in so kurzer Zeit habe bevölkert werden können.

§ 111.

Von besonderem Nutzen sind die Logarithmen bei der Auflösung solcher Gleichungen, in denen die unbekannte Grösse in einem Exponenten vorkommt. Erhält man z. B. eine Gleichung wie $a^x = b$, so lässt sich der Wert der Unbekannten x nur mit Hülfe der Logarithmen aus ihr bestimmen. Da nämlich $a^x = b$ ist, so wird $\log a^x = x \log a = \log b$, und daher $x = \frac{\log b}{\log a}$. Dabei ist es gleichgültig, was für eines Logarithmensystems man sich bedient, da die Logarithmen der Zahlen a und b nach § 108 in allen Systemen dasselbe Verhältnis haben.

Erstes Beispiel.

Wenn sich die Zahl der Menschen jährlich um den hundertsten Teil vermehrte, nach wieviel Jahren würde alsdann dieselbe zehnmal so gross sein?

Nehmen wir an, es sei dies nach x Jahren der Fall, und bezeichnen wir die anfängliche Menschenzahl mit n, so ist dieselbe nach Verlauf von x Jahren gleich $\left(\frac{101}{100}\right)^x \cdot n$, und da diese gleich $10n$ sein soll, so wird $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$, folglich $x \log \frac{101}{100} = \log 10$ oder $x = \frac{\log 10}{\log 101 - \log 100}$. Hieraus ergiebt sich $x = \frac{10000000}{43214} = 231$. Nach 231 Jahren wird also die Zahl der Menschen, wenn sie sich jährlich nur um den hundertsten Teil vermehrt, zehnmal so gross, und folglich nach 462 Jahren hundert- und nach 693 Jahren tausendmal so gross sein wie jetzt.

Zweites Beispiel.

Jemand hat von einem andern 400000 Fl. zu 5 % Zinsen entliehen und zahlt in jedem Jahre 25000 Fl. dem andern aus. Nach wieviel Jahren wird er seine Schuld vollständig getilgt haben?

Bezeichnen wir die ganze Schuld mit a und die jährlich ausgezahlte Summe mit b, so dass $a = 400000$ Fl. und $b = 25000$ Fl. ist, so wird die Schuld nach Verlauf eines Jahres noch $\frac{105}{100} a - b$, nach zwei Jahren noch $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$, nach drei Jahren noch $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100} b - b$, und folglich nach x Jahren, wenn wir der Kürze halber n für $\frac{105}{100}$ schreiben, noch

$$n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b - \cdots - b = n^x a - b(1 + n + n^2 + \cdots + n^{x-1})$$

betragen. Da nun nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$1 + n + n^2 + \cdots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$$

ist, so wird sich die Schuld nach x Jahren noch auf

$$n^x a - \frac{n^x b - b}{n - 1} \text{ Fl.}$$

belaufen. Setzt man nun dieses gleich 0, so erhält man die Gleichung:

$$n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1} \quad \text{oder} \quad (n-1) n^x a = n^x b - b,$$

und daher:

$$(b - na + a) n^x = b \quad \text{oder} \quad n^x = \frac{b}{b - (n-1) a}.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{\log b - \log(b - (n-1) a)}{\log n}.$$

Da nun $a = 400000$, $b = 25000$ und $n = \frac{105}{100}$ ist, so wird

$$(n-1) a = 20000 \quad \text{und} \quad b - (n-1) a = 5000,$$

und daher ist die Anzahl der Jahre, nach denen die Schuld vollständig getilgt ist:

$$x = \frac{\log 25000 - \log 5000}{\log \frac{105}{100}} = \frac{\log 5}{\log \frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893}.$$

Es wird somit x etwas kleiner als 33. Nach Verlauf von 33 Jahren wird nämlich nicht nur die ganze Schuld getilgt sein, sondern es muss sogar der Gläubiger dem Schuldner:

$$\frac{(n^{33}-1)b}{n-1} - n^{33}a = \frac{(\frac{21}{20})^{33}5000 - 25000}{\frac{1}{20}} = 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000 \text{ Fl.}$$

wieder herausgeben. Da aber $\log\frac{21}{20} = 0{,}0211892991$ ist, so wird $\log\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0{,}69924687$ und $\log 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469$. Letzterem entspricht die Zahl 500318,8. Es muss somit nach dem 33ten Jahre der Gläubiger dem Schuldner $318\frac{4}{5}$ Fl. wieder zurückzahlen.

§ 112.

Die **gemeinen Logarithmen, deren Basis 10 ist,** haben jedoch neben dem Nutzen, den die Logarithmen überhaupt gewähren, bei unserm dekadischen Zahlensysteme noch einen besonderen Vorteil und sind gerade deswegen vor allen andern Systemen brauchbar. Da nämlich die Logarithmen aller Zahlen mit alleiniger Ausnahme der Potenzen von 10 als Decimalbrüche sich darstellen, und die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 zwischen den Grenzen 0 und 1, die der Zahlen zwischen 10 und 100 zwischen den Grenzen 1 und 2 u. s. w. enthalten sind, so besteht jeder Logarithmus aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruch, und zwar nennt man gewöhnlich die ganze Zahl die **Charakteristik** und den Decimalbruch die **Mantisse**. Die Charakteristik ist daher stets um eine Einheit kleiner als die Anzahl der Ziffern beträgt, welche der ganze Teil der gegebenen Zahl enthält.

So ist die Charakteristik des Logarithmus der Zahl 78509 gleich 4, weil diese Zahl 5 Ziffern enthält. Umgekehrt kann man aus dem Logarithmus einer Zahl sofort ersehen, aus wieviel Ziffern dieselbe besteht. So wird z. B. die Zahl, welche zu dem Logarithmus 7,5804631 gehört, mit 8 Ziffern geschrieben.

§ 113.

Wenn daher die Mantissen zweier Logarithmen mit einander übereinstimmen, während ihre Charakteristiken verschieden sind, so werden die zu diesen Logarithmen gehörigen Zahlen in demselben Verhältnis zu einander stehen, wie eine gewisse Potenz von 10 zur Einheit, und werden demgemäss mit denselben Ziffern geschrieben werden. So sind die zu den Logarithmen 4,9130187 und 6,9130187 gehörigen Zahlen bezüglich 81850 und 8185000; ferner entspricht dem Logarithmus 3,9130187 die Zahl 8185 und dem Logarithmus 0,9130187 die Zahl 8,185. Es zeigt daher die Mantisse für sich allein an, mit welchen Ziffern die Zahl geschrieben wird; sind diese gefunden, so ergiebt sich aus der Charakteristik, wie viele davon, von links nach rechts gerechnet, den ganzen Teil ausmachen, während die übrig bleibenden bis zur letzten rechter Hand den Decimalbruch geben. Hätte man z. B. den Logarithmus 2,7603429 gefunden, so giebt die Mantisse die Ziffern 5758945; die Chararakteristik 2 aber bestimmt diese Zahl für den angeführten Logarithmus genauer so, wie folgt: 575,8945. Wäre die Charakteristik 0, so würde die Zahl 5,758945 heissen, und wenn man die Charakteristik noch um eine Einheit vermindert, so wird die zugehörige Zahl dadurch zehnmal kleiner, nämlich 0,5758945. Ebenso gehört zur Charakteristik — 2 die Zahl 0,05758945 u. s. w. An Stelle der negativen Charakteristiken — 1, — 2, — 3 u. s. w. schreibt man jedoch gewöhnlich 9, 8, 7 u. s. w., indem man im Gedächtnis behält, dass diese Logarithmen um 10 vermindert werden müssen. Indessen pflegt dies in den Einleitungen zu den logarithmischen Tafeln weitläufig auseinandergesetzt zu werden.

Beispiel.

Wenn die Reihe 2, 4, 16, 256 u. s. w., in welcher jedes Glied das Quadrat des vorhergehenden ist, bis zum 25ten Gliede fortgesetzt wird, so verlangt man die Grösse des letzten Gliedes zu wissen.

Drückt man die Glieder dieser Reihe in bequemerer Weise mittelst der Exponenten aus, nämlich $2, 2^2, 2^4, 2^8 \ldots$, so sieht man sofort, dass diese Exponenten eine geometrische Progression bilden, und dass der Exponent des 25ten Gliedes gleich $2^{24} = 16777216$ ist. Es wird daher dieses Glied selbst gleich $2^{16777216}$, und sein Logarithmus gleich $16777216 \log 2$. Da nun $\log 2 = 0{,}30102999566398 1195$ ist, so wird der Logarithmus des gesuchten Gliedes gleich 5050445,25973367, aus dessen Charakteristik erhellt, dass die gesuchte Zahl in gewöhnlicher Weise dargestellt mit 5050446 Ziffern geschrieben wird. Sucht man aber die Mantisse 259733675932 in der Logarithmentafel auf, so findet man als erste Ziffern der gesuchten Zahl: 181858. Obwohl man daher jene Zahl nicht ganz darstellen kann, so kann man von ihr doch sagen, dass sie aus 5050446 Ziffern besteht, und dass die ersten sechs Ziffern 181858 sind, auf welche dann rechts noch 5050440 andere folgen. Uebrigens lassen sich noch einige derselben aus grösseren Logarithmentafeln finden; z. B. werden die ersten elf Ziffern 18185852986 sein.

7. Capitel.

Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen.

§ 114.

Da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt, falls a eine Zahl grösser als 1 ist, so folgt daraus, dass, wenn der Exponent unendlich wenig grösser ist als 0, auch die Potenz die Einheit nur um unendlich wenig übersteigen wird. Ist daher ω eine unendlich kleine Zahl oder ein beliebig kleiner, jedoch von 0 verschiedener Bruch, so wird $a^{\omega} = 1 + \psi$, wenn ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl bedeutet; denn aus dem vorhergehenden Capitel ist bekannt, dass, wenn nicht ψ unendlich klein sein würde, es auch ω nicht sein könnte. Es ist somit entweder $\psi = \omega$, oder $\psi > \omega$, oder $\psi < \omega$, und zwar wird dies offenbar von der Grösse von a abhängen. Da nun a noch unbekannt ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen. Alsdann wird: $a^{\omega} = 1 + k\omega$, oder wenn wir a als Basis der Logarithmen nehmen:

$$\omega = \log(1 + k\omega).$$

Beispiel.

Damit es desto deutlicher hervortrete, wie die Zahl k von der Basis a abhängt, setzen wir $a = 10$ und suchen aus den gewöhnlichen Tafeln den Logarithmus einer Zahl, die nur sehr wenig grösser ist als 1, z. B. von $1 + \frac{1}{1000000}$, so dass also $k\omega = \frac{1}{1000000}$ ist. Alsdann soll sein:

$$\log\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = \log\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega.$$

Da $k\omega = 0{,}00000100000$ ist, so ergiebt sich hieraus:

$$\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}, \text{ und somit } k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258,$$

und daraus geht hervor, dass k eine endliche Zahl ist, welche von dem Werte der Basis a abhängt. Denn nimmt man eine andere Zahl als Basis a, so wird der Logarithmus derselben Zahl $1 + k\omega$ zu dem obigen in einem gegebenen Verhältnis stehen, und es wird sich somit ein anderer Wert von k ergeben.

§ 115.

Da $a^{\omega} = 1 + k\omega$ ist, so wird, welche Zahl man auch für i setzen möge:

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i.$$

Es ist mithin:

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

Setzt man nun $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird i, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich gross, und da hieraus $\omega = \frac{z}{i}$ folgt, so wird ω gleich einem Bruche mit unendlich grossem Nenner, also, wie angenommen, unendlich klein sein. Substituirt man daher $\frac{z}{i}$ für ω, so erhält man:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3$$
$$+ \frac{1\cdot(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4 + \cdots,$$

eine Gleichung, die vollkommen richtig ist, sobald für i ein unendlich grosser Wert gesetzt wird. k aber ist darin, wie wir sahen, eine bestimmte endliche Zahl, deren Wert von a abhängt.

§ 116.

Da aber i eine unendlich grosse Zahl ist, so wird $\frac{i-1}{i} = 1$; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt; es wird daher, wenn i eine Zahl bedeutet, die grösser ist als jede nur denkbare Zahl, der Bruch $\frac{i-1}{i}$ ge-

gerade gleich der Einheit werden. Aus demselben Grunde aber wird $\frac{i-2}{i}=1$, $\frac{i-3}{i}=1$ u. s. w. Folglich wird:

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\quad \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3},\quad \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4} \text{ u. s. w.}$$

und man erhält daher, wenn man diese Werte einsetzt:

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ in inf.}$$

Diese Gleichung giebt aber zugleich die Beziehung an, welche zwischen a und k besteht; denn setzt man $z=1$, so wird:

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Wenn z. B. $a=10$ ist, so muss, wie wir vorher fanden, notwendig ungefähr $k=2{,}30258$ sein.

§ 117.

Nehmen wir an, es sei $b=a^n$, so wird, wenn a als Basis der Logarithmen genommen wird, $\log b=n$. Da nun $b^z=a^{nz}$ ist, so ergiebt sich für b^z die unendliche Reihe:

$$b^z=1+\frac{knz}{1}+\frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4n^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

und wenn man $\log b$ für n schreibt:

$$b^z=1+\frac{kz}{1}\log b+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(\log b)^2+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log b)^3+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log b)^4+\cdots$$

Ist also der Wert von k für einen gegebenen Wert der Basis a bekannt, so lässt sich jede beliebige Exponentialgrösse b^z durch eine unendliche Reihe darstellen, deren Glieder nach den Potenzen von z fortschreiten. Nach diesen Auseinandersetzungen können wir nun auch zeigen, wie sich die Logarithmen in unendliche Reihen entwickeln lassen.

§ 118.

Da $a^\omega=1+k\omega$ ist, wenn ω einen unendlich kleinen Bruch bedeutet, und die Beziehung zwischen a und k durch die Gleichung:

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

bestimmt wird, so ist, wenn man a als Basis der Logarithmen nimmt:

$$\omega=\log(1+k\omega) \text{ und } i\omega=\log(1+k\omega)^i.$$

Offenbar aber wird die Potenz $(1+k\omega)^i$ um so mehr die Einheit übersteigen, je grösser die Zahl i ist, und wenn man i geradezu unendlich gross annimmt, so wird der Wert der Potenz $(1+k\omega)^i$ jede beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, erreichen können. Setzt man daher $(1+k\omega)^i=1+x$, so wird $\log(1+x)=i\omega$ und, da $i\omega$ einen endlichen Wert besitzt, da es der Logarithmus von $1+x$ ist, so folgt hieraus, dass i eine unendlich grosse Zahl sein muss, weil sonst $i\omega$ keinen endlichen Wert haben könnte.

§ 119.

Da wir $(1+k\omega)^i=1+x$ gesetzt haben, so ist $1+k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}$ und $k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}-1$. Hieraus folgt:

$$i\omega=\frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right),$$

und weil $i\omega=\log(1+x)$ ist, so wird:

$$\log(1+x)=\frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right),$$

wofern i eine unendlich grosse Zahl bedeutet. Nun ist aber:

$$(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2+\frac{1(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3$$
$$-\frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4+\cdots,$$

und ferner, weil i eine unendlich grosse Zahl ist:

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\quad \frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3},\quad \frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4} \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist:

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}}=i+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

und folglich:

$$\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right),$$

wobei a als Basis der Logarithmen zu nehmen ist und k eine zu dieser Basis gehörige Zahl bedeutet, welche mit ihr durch die Gleichung:

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

verbunden ist.

§ 120.

Da wir nunmehr eine Reihe für den Logarithmus der Zahl $1+x$ besitzen, so können wir mittelst derselben auch den Wert k für eine gegebene Basis a bestimmen. Setzt man nämlich $1+x=a$, so wird wegen $\log a = 1$

$$1=\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\right),$$

oder:

$$k=\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots$$

Der Wert dieser Reihe muss, wenn $a=10$ gesetzt wird, annähernd gleich 2,30258 sein, obwohl schwer einzusehen ist, wie

$$2{,}30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\cdots$$

sein könne, da doch die Glieder dieser Reihe fortwährend grösser werden, und man daher die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, dass man nur einige Glieder davon berechnet und mit einander vereinigt. Indessen wird sich bald ein Mittel darbieten, diesem Uebelstande abzuhelfen.

§ 121.

Es wird nun, wenn man in der Reihe

$$\log(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

x negativ voraussetzt:

$$\log(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right).$$

Subtrahirt man demnach die letztere Reihe von der ersten, so erhält man

$$\log(1+x)-\log(1-x)=\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right).$$

Setzt man nun:

$$\frac{1+x}{1-x}=a, \text{ demnach } x=\frac{a-1}{a+1},$$

so folgt hieraus, da $\log a = 1$ ist:

$$k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\cdots\right),$$

und aus dieser Gleichung lässt sich der Wert von k aus der Basis a finden. Setzt man also $a=10$, so wird:

$$k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\frac{9^7}{7\cdot 11^7}+\cdots\right).$$

Da die Glieder dieser Reihe sehr merklich abnehmen, so kann man durch Addition einiger Glieder sehr bald einen hinlänglich genauen Wert von k erhalten.

§ 122.

Da man nun bei der Verfertigung eines Logarithmensystems die Basis a nach Belieben wählen kann, so kann man sie auch so annehmen, dass $k=1$ wird. Setzen wir also $k=1$, so erhalten wir nach der § 116 gefundenen Reihe:

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche und addirt sie sodann, so erhält man für a folgenden Wert:

$$a=2{,}71828182845904523536028,$$

wo auch noch die letzte Ziffer genau ist. Die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen werden gewöhnlich **natürliche** oder **hyperbolische Logarithmen** genannt, weil die Quadratur der Hyperbel durch solche Logarithmen ausgeführt werden kann. Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl 2,718281828459 ⋯ stets den Buchstaben e gebrauchen, so dass also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, welcher der Wert $k=1$ entspricht, oder es soll e stets die Summe der unendlichen Reihe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

bezeichnen.

§ 123.

Die hyperbolischen Logarithmen besitzen also die Eigenschaft, dass der Logarithmus der Zahl $1+\omega$ gleich ω ist, wenn ω eine unendlich kleine Zahlgrösse bedeutet, und da vermöge dieser Eigenschaft der Wert $k=1$ bekannt ist, so lassen sich die hyperbolischen Logarithmen aller Zahlen berechnen. Es wird folglich, wenn man e für die oben gefundene Zahl setzt:

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

während die hyperbolischen Logarithmen selbst aus einer der Reihen:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots,$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \cdots,$$

welche sehr stark convergiren, wenn man für x einen sehr kleinen Bruch setzt, gefunden werden können. So findet man aus der letzteren Gleichung mit leichter Mühe die Logarithmen der Zahlen, welche nicht viel grösser als 1 sind. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{5}$, so wird:

$$\log\frac{6}{4} = \log\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \cdots$$

Setzt man $x = \frac{1}{7}$, so wird:

$$\log\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \cdots$$

Setzt man $x = \frac{1}{9}$, so wird:

$$\log\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Aus den Logarithmen dieser Brüche aber findet man die Logarithmen der ganzen Zahlen, da nach der Natur der Logarithmen:

$$\log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} = \log 2;\ \log\frac{3}{2} + \log 2 = \log 3;\ 2\log 2 = \log 4;\ \log\frac{5}{4} + \log 4 = \log 5;$$

$$\log 2 + \log 3 = \log 6;\ \ 3\log 2 = \log 8;\ \ 2\log 3 = \log 9,\ \ \log 2 + \log 5 = \log 10$$

ist.

Beispiel.

Es werden daher die hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 gleich:

$$\begin{array}{l}
\log 1 = 0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000 \\
\log 2 = 0,\ 69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321 \\
\log 3 = 1,\ 09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452 \\
\log 4 = 1,\ 38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642 \\
\log 5 = 1,\ 60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593 \\
\log 6 = 1,\ 79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24773 \\
\log 7 = 1,\ 94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 54639 \\
\log 8 = 2,\ 07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964 \\
\log 9 = 2,\ 19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905 \\
\log 10 = 2,\ 30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914
\end{array}$$

Alle diese Logarithmen sind aus den obigen drei Reihen berechnet worden [illegible] Ausnahme von log 7, welcher sich in folgender Weise ergab:

Setzt man in der letzten Reihe $x = \frac{1}{99}$, so wird

$$\log\frac{100}{98} = \log\frac{50}{49} = 0{,}0202027073175194484078230.$$

Zieht man diesen von

$$\log 50 = 2\log 5 + \log 2 = 3{,}9120230054281460586187508$$

ab, so erhält man log 49, und dieser ergiebt, durch 2 dividirt, log 7.

§ 124.

Setzt man den hyperbolischen Logarithmus von $1 + x$ oder

$$\log(1+x) = y,$$

so wird:

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Nimmt man aber die Zahl a als Basis der Logarithmen, und ist der Logarithmus eben der Zahl $1 + x$ für diese Basis gleich v, so wird, wie wir sahen:

$$v = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) = \frac{y}{k}.$$

Hieraus folgt $k = \frac{y}{v}$. Es wird daher am passendsten der Wert von k, welcher der Basis a entspricht, dadurch definirt, dass man sagt, er sei gleich dem hyperbolischen Logarithmus irgend einer Zahl dividirt durch den Logarithmus derselben Zahl für die Basis a. Nimmt man also geradezu a als diese Zahl, so wird $v = 1$ und daher k gleich dem hyperbolischen Logarithmus der Basis a. In dem gemeinen Logarithmensystem, in welchem $a = 10$ ist, wird somit k gleich dem hyperbolischen Logarithmus von 10, also:

$$k = 2{,}302585092994045684017991 4 \ldots,$$

welchen Wert wir bereits früher (§ 114) näherungsweise gefunden hatten. Wenn man demnach jeden hyperbolischen Logarithmus durch diese Zahl k dividirt oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit dem Decimalbruche:

$$0{,}4342944819032518276511289$$

multiplicirt, so erhält man die gemeinen Logarithmen, deren Basis $a = 10$ ist.

§ 125.

Da

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

ist, so wird, wenn man $a^y = e^z$ setzt und die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $y \log a = z$, weil $\log e = 1$ ist. Setzt man nun diesen Wert von z oben ein, so erhält man:

$$a^y = 1 + \frac{y \log a}{1} + \frac{y^2 (\log a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3 (\log a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

und es kann daher auch jede beliebige Exponentialgrösse mittelst der hyperbolischen Logarithmen durch eine unendliche Reihe dargestellt werden. Bedeutet ferner i eine unendlich grosse Zahl, so lassen sich sowohl die Exponentialgrössen wie die Logarithmen durch gewöhnliche Potenzen ausdrücken. Denn es ist:

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i \text{ und folglich } a^y = \left(1 + \frac{y \log a}{i}\right)^i,$$

und ferner erhält man für die hyperbolischen Logarithmen:

$$\log(1 + x) = i\left((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right).$$

Was den weiteren Gebrauch der hyperbolischen Logarithmen betrifft, so wird darüber in der Integralrechnung ausführlicher gehandelt werden.

8. Capitel.

Von den transcendenten Zahlgrössen, welche aus dem Kreise entspringen.

§ 126.

Nach den Logarithmen und den Exponentialgrössen müssen die **Kreisbogen** und deren **Sinus** und **Cosinus** betrachtet werden, nicht nur deshalb, weil sie eine andere Art von transcendenten Zahlgrössen ausmachen, sondern auch, was weiter unten deutlicher hervortreten wird, **weil sie aus den Logarithmen und den Exponentialgrössen** selbst **entspringen,** sobald dieselben **imaginäre** Zahlgrössen enthalten.

Setzt man nun den Halbmesser eines Kreises oder den Sinus totus gleich 1, so ist bekannt, dass man den Umfang des Kreises in rationalen Zahlen nicht genau ausdrücken kann, dass man aber näherungsweise für den halben Umfang des Kreises die Zahl

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46...

gefunden hat. Für diese Zahl wollen wir der Kürze wegen π schreiben, so dass also π gleich dem halben Umfang eines Kreises vom Halbmesser 1 oder gleich der Länge eines Bogens von 180 Graden ist.

§ 127.

Bezeichnet man einen beliebigen Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser stets gleich 1 vorausgesetzt wird, mit z, so betrachtet man gewöhnlich vorzugsweise den Sinus und Cosinus dieses Bogens z. In der Folge bezeichnen wir den Sinus eines Bogens z durch $\sin \operatorname{arc} z$ oder kürzer durch $\sin z$, ebenso den Cosinus durch $\cos \operatorname{arc} z$ oder kürzer durch $\cos z$. Es ist daher, da π der Bogen von 180° ist:

$\sin 0\pi = 0$, $\cos 0\pi = 1$; ferner $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$;

$\sin\pi \;= 0$, $\cos\pi \;= -1$; $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$;

$\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$.

Es sind daher alle Sinus und Cosinus innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 enthalten. Ferner aber wird:

$$\cos z = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right),\ \sin z = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) \text{ und } \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Ausser diesen Bezeichnungen sind auch noch die folgenden zu merken: $\operatorname{tang} z$, welches die Tangente des Bogens z, und $\cot z$, welches die Cotangente des Bogens z bedeutet, und zwar ist, wie aus der Trigonometrie bekannt ist:

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ und } \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tang} z}.$$

§ 128.

Ferner wird in der Trigonometrie bewiesen, dass, wenn y und z zwei Bogen sind, die Formeln gelten:

$$\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$
$$\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$
$$\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$
$$\cos(y-z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z,$$

und hieraus gehen, wenn man für y die Bogen $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ u. s. w. einsetzt, die folgenden hervor:

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = -\sin z$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$
$\sin(\pi + z) = -\sin z$ $\cos(\pi + z) = -\cos z$	$\sin(\pi - z) = +\sin z$ $\cos(\pi - z) = -\cos z$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = +\sin z$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\sin z$
$\sin(2\pi + z) = +\sin z$ $\cos(2\pi + z) = +\cos z$	$\sin(2\pi - z) = -\sin z$ $\cos(2\pi - z) = +\cos z$.

Wenn daher n irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist:

$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = -\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = +\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = -\cos z$
$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = +\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = +\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = +\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = -\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = +\cos z$

Diese Formeln gelten, mag n eine positive oder negative ganze Zahl sein.

§ 129.

Wird $\sin z = p$ und $\cos z = q$ gesetzt, so ist $p^2 + q^2 = 1$. Ebenso ist, wenn $\sin y = m$ und $\cos y = n$ gesetzt wird, $m^2 + n^2 = 1$. Die Sinus und Cosinus der aus diesen zusammengesetzten Bogen ergeben sich aus den Formeln:

$\sin z = p$	$\cos z = q$
$\sin(y+z) = mq + np$	$\cos(y+z) = nq - mp$
$\sin(2y+z) = 2mnq + (n^2 - m^2)p$	$\cos(2y+z) = (n^2 - m^2)q - 2mnp$
$\sin(3y+z) = (3n^2m - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p$	$\cos(3y+z) = (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p$
u. s. w.	u. s. w.

Während also die Bogen z, $y+z$, $2y+z$, $3y+z$ u. s. w. in **arithmetischer Progression** fortschreiten, bilden ihre Sinus sowohl wie ihre Cosinus eine **rekurrente Reihe** von der Art, wie sie aus dem Nenner $1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$ entspringt. Es ist nämlich:

$$\sin(2y + z) = 2n \sin(y + z) - (m^2 + n^2)\sin z, \text{ oder}$$
$$\sin(2y + z) = 2\cos y \sin(y + z) - \sin z, \quad \text{ebenso}$$
$$\cos(2y + z) = 2\cos y \cos(y + z) - \cos z.$$

Analog ergiebt sich:

$$\sin(3y+z) = 2\cos y \sin(2y+z) - \sin(y+z)$$

$$\cos(3y+z) = 2\cos y \cos(2y+z) - \cos(y+z). \text{ Ferner:}$$

$$\sin(4y+z) = 2\cos y \sin(3y+z) - \sin(2y+z)$$

$$\cos(4y+z) = 2\cos y \cos(3y+z) - \cos(2y+z) \text{ u. s. w.}$$

Mittelst dieses Gesetzes lassen sich die Formeln für die Sinus und Cosinus der Bogen, die in arithmetischer Progression fortschreiten, so weit man will fortsetzen.

§ 130.

Da

$$\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$

und

$$\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$

ist, so erhält man, indem man diese Ausdrücke einmal addirt, das andere Mal subtrahirt:

$$\sin y \cos z = \frac{\sin(y+z) + \sin(y-z)}{2}$$

$$\cos y \sin z = \frac{\sin(y+z) - \sin(y-z)}{2}.$$

Da ferner

$$\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$

und

$$\cos(y-z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z$$

ist, so erhält man auf gleiche Weise:

$$\cos y \cos z = \frac{\cos(y-z) + \cos(y+z)}{2}$$

$$\sin y \sin z = \frac{\cos(y-z) - \cos(y+z)}{2}.$$

Setzt man nun $y = z = \frac{v}{2}$, so ergeben sich aus den letzten beiden Formeln die folgenden:

$$\cos^2\frac{v}{2} = \frac{1+\cos v}{2}, \text{ also } \cos\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$$

$$\sin^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{2}, \text{ also } \sin\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos v}{2}},$$

mittelst welcher man aus dem gegebenen Cosinus irgend eines Winkels den Sinus und Cosinus des halben Winkels finden kann.

§ 131.

Setzt man ferner $y+z=a$ und $y-z=b$, so wird $y=\frac{a+b}{2}$ und $z=\frac{a-b}{2}$. Setzt man diese Werte in die früheren Formeln ein, so erhält man folgende Gleichungen oder Lehrsätze:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos b - \cos a = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

und hieraus entspringen durch Division die Sätze:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}\cdot\cot\frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tang}\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\sin b + \sin a}{\cos b - \cos a} = \cot\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tang}\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a} = \cot\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = \cot\frac{a+b}{2}\cdot\cot\frac{a-b}{2}.$$

Endlich leitet man hieraus noch her:

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos b - \cos a}{\sin a - \sin b}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}\cdot\frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \cot^2\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}\cdot\frac{\cos b - \cos a}{\cos a + \cos b} = \cot^2\frac{a+b}{2}.$$

§ 132.

Da $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ist, so ist auch, wenn man die linke Seite dieser Gleichung in ihre Factoren auflöst:

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z) = 1.$$

Obwohl nun diese Factoren imaginär sind, so gewähren sie doch bei der Addition und bei der Vervielfältigung der Bogen einen sehr erheblichen Nutzen. Sucht man nämlich das Product zweier solcher Factoren:

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

so findet man:

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z + (\cos y \sin z + \sin y \cos z)\sqrt{-1}.$$

Da nun aber

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos(y+z), \text{ und}$$
$$\sin y \cos z + \cos y \sin z = \sin(y+z)$$

ist, so ist das Product:

$$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z).$$

Ebenso findet man:

$$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z),$$

und ferner:

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z).$$

§ 133.

Hieraus folgt:

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z, \text{ und}$$
$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z, \text{ und somit allgemein}$$
$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Wegen des doppelten Vorzeichens erhält man hieraus:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$
$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Entwickelt man aber diese Binomien in Reihen, so wird:

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cos^{n-6} z \sin^6 z + \cdots,$$

und

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} z \sin^3 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos^{n-5} z \sin^5 z - \cdots$$

§ 134.

Ist nun z ein unendlich kleiner Bogen, so wird $\sin z = z$ und $\cos z = 1$. Ist also, wenn ferner n eine unendlich grosse Zahl von der Beschaffenheit, dass nz einen Bogen von endlicher Grösse, den wir v nennen wollen, darstellt, so wird, weil $\sin z = z = \frac{v}{n}$ ist:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$
$$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

Ist daher der Bogen v gegeben, so kann man **mittelst dieser Reihen seinen Sinus und Cosinus finden**. Damit jedoch der Nutzen dieser Formeln noch deutlicher hervortrete, wollen wir annehmen, dass v einen Bogen bedeute, der sich zu einem Quadranten oder zu $90°$ verhält, wie $m:n$, d. h. es soll $v = \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ sein. Da nun der Wert von π bekannt ist, so erhält man, wenn man denselben überall substituirt:

$$
\begin{aligned}
\sin \operatorname{arc}\frac{m}{n}90° = &+ \frac{m}{n}\cdot 1{,}5707963267948966192313216916 \\
&- \frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}6459640975062462536557565636 \\
&+ \frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}0796926262461670451205055488 \\
&- \frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}0046817541353186881006854632 \\
&+ \frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}0001604411847873598218726605 \\
&- \frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}0000035988432352120853404580 \\
&+ \frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}0000000569217292196792681171 \\
&- \frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}0000000006688035109811467224 \\
&+ \frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}0000000000060669357311061950 \\
&- \frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}0000000000000437706546731370 \\
&+ \frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0.0000000000000002571422892856
\end{aligned}
$$

$$- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}0000000000000000012538995403$$
$$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}00000000000000000000051564550$$
$$- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0{,}000000000000000000000000181239$$
$$\ldots \quad + \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0{,}000000000000000000000000000549$$

und

$$\cos \operatorname{arc} \frac{m}{n} 90^\circ = + \quad 1{,}0000000000000000000000000000$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 1{,}2337005501361698273543113745$$
$$+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}2536695079010480136365633659$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}0208634807633529608730516364$$
$$+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}0009192602748394265802417158$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}0000252020423730606054810526$$
$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}0000004710874778818171503665$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}0000000063866030837918522408$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}0000000000656596311497947230$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}0000000000005294400200734620$$
$$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}0000000000000034377391790981$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}0000000000000000183599165212$$
$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}0000000000000000000820675327$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}0000000000000000000003115285$$
$$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}0000000000000000000000010165$$
$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000026.$$

Da es nun genügt, die Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 45° zu kennen, so ist der Bruch $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$, und es werden daher die gegebenen Reihen wegen der darin vorkommenden Potenzen des Bruches $\frac{m}{n}$ sehr stark convergiren, so dass man meistens nur einige wenige Glieder zu berechnen braucht, zumal wenn man den Sinus und Cosinus nicht auf so viel Decimalstellen verlangt.

§ 135.

Hat man den Sinus und Cosinus gefunden, so kann man daraus mittelst der Formeln $\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ auch die **Tangente und Cotangente berechnen.** Da indessen die Multiplication und Division mit so grossen Zahlen sehr beschwerlich ist, so ist es besser, auch für diese besondere Reihen aufzustellen. Es ist nun:

$$\operatorname{tang} v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots}{1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots}$$

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots}{v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots}$$

Setzt man daher wieder den Bogen $v = \frac{m}{n} 90°$, so wird analog wie vorher:

$$\operatorname{tang} \operatorname{arc} \frac{m}{n} 90^\circ = \frac{2mn}{n^2 - m^2} \cdot 0{,}6366197723675$$
$$+ \frac{m}{n} \cdot 0{,}2975567820597$$
$$+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}0186886502773$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0018424752034$$
$$+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}0001975800714$$
$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}0000216977245$$
$$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000024011370$$

$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0{,}0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0{,}0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0{,}0000000000005$$

$$\cot \operatorname{arc}\frac{m}{n}\,90^\circ = +\frac{n}{m}\cdot 0{,}6366197723675$$
$$-\frac{4mn}{4n^2-m^2}\cdot 0{,}3183098861837$$
$$-\frac{m}{n}\cdot 0{,}2052888894145$$
$$-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}0065510747882$$
$$-\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}0003450292554$$
$$-\frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}0000202791060$$
$$-\frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}0000012366527$$
$$-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}0000000764959$$
$$-\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}0000000047597$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}0000000002969$$
$$-\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}0000000000185$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}0000000000011.$$

Auf welche Art man zu diesen Reihen gelangt, wird weiter unten (§ 197) auseinandergesetzt werden.

§ 136.

Es ist bereits oben bemerkt worden, dass man, wenn die Sinus und Cosinus aller Winkel, welche kleiner als 45° sind, bekannt sind, dadurch zugleich die Sinus und Cosinus aller grösseren Winkel habe. Man kann aber auch schon aus den Sinus und Cosinus der Winkel bis zu **30°** die Sinus und Cosinus **aller** grösseren Winkel allein **durch Addition** und **Subtraction** finden. Denn da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ist, so wird nach § 130, wenn man $y = 30^\circ$ setzt:

$$\cos z = \sin(30^\circ + z) + \sin(30^\circ - z),\quad\text{und}$$
$$\sin z = \cos(30^\circ - z) - \cos(30^\circ + z),$$

und somit findet man aus den Sinus und Cosinus der Winkel z und $30^0 - z$:

$$\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z)\quad\text{und}$$
$$\cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z.$$

Hieraus erhält man also die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis 60°, und daraus dann auch alle übrigen.

§ 137.

Bei den Tangenten und Cotangenten giebt es ein ähnliches Hülfsmittel. Da nämlich

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang}a + \operatorname{tang}b}{1 - \operatorname{tang}a\cdot\operatorname{tang}b}$$

ist, so wird:

$$\operatorname{tang}2a = \frac{2\operatorname{tang}a}{1-\operatorname{tang}^2 a},\quad\text{und}\quad \cot 2a = \frac{\cot a - \operatorname{tang}a}{2},$$

und aus letzterer Formel ergeben sich aus den Tangenten und Cotangenten der Bogen, welche kleiner als 30° sind, die Cotangenten der Bogen bis zu 60°.

Ist dann ferner $a = 30^\circ - b$, so wird $2a = 60^\circ - 2b$ und $\cot 2a = \operatorname{tang}(30^\circ + 2b)$, demnach:

$$\operatorname{tang}(30^\circ + 2b) = \frac{\cot(30^\circ - b) - \operatorname{tang}(30^\circ - b)}{2},$$

wonach man auch die Tangenten der Bogen, welche grösser als 30° sind, findet.

Die Sekanten und Cosekanten aber lassen sich aus den Tangenten durch blosse Subtraction ableiten, denn es ist:

$$\operatorname{cosec} z = \cot\frac{z}{2} - \cot z,\quad\text{und daher}$$
$$\sec z = \cot\left(45^\circ - \frac{z}{2}\right) - \operatorname{tang} z.$$

Hieraus geht deutlich hervor, auf welche Weise man **die trigonometrischen Tafeln anfertigen** kann.

§ 138.

Es werde nun abermals in den Formeln des § 133 der Bogen z als unendlich klein vorausgesetzt und ferner für n eine unendlich grosse Zahl von der Beschaffenheit angenommen, dass iz einen endlichen Wert v erhält. Dann ist also $nz = v$, $z = \frac{v}{i}$, folglich $\sin z = \frac{v}{i}$ und $\cos z = 1$.

Setzt man diese Werte in die Formeln des § 133 ein, so nehmen dieselben die Gestalt an:

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

und

$$\sin v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Im vorhergehenden Capitel sahen wir aber, dass $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$ ist, wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet; schreibt man daher für z einmal $+v\sqrt{-1}$, das andere Mal $-v\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

und

$$\sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Hieraus ist ersichtlich, wie die imaginären **Exponentialgrössen** auf die **Sinus und Cosinus reeller Bogen zurückgeführt** werden können. Es ist nämlich:

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\,\sin v,$$

und

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\,\sin v.$$

§ 139.

Es sei jetzt in denselben Formeln des § 133 n eine unendlich kleine Zahl oder $n = \frac{1}{i}$, wo i eine unendlich grosse Zahl bedeutet. Dann ist

$$\cos nz = \cos\frac{z}{i} = 1 \text{ und } \sin nz = \sin\frac{z}{i} = \frac{z}{i},$$

da der Sinus eines unendlich kleinen Bogens dem Bogen selbst gleich, der Cosinus aber gleich 1 ist. Man erhält dadurch:

$$1 = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}} + (\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

und

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Nun haben wir aber in § 125 gezeigt, dass, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $\log(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$, oder, wenn man y für $1+x$ schreibt, $y^{\frac{1}{i}} = \frac{1}{i}\log y + 1$ ist. Setzt man daher hier für y einmal $\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z$, das andere Mal $\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z$, so ergiebt sich zunächst aus der ersten der eben hingeschriebenen Formeln:

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i}\log(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z) + 1 + \frac{1}{i}\log(\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)}{2} = 1,$$

weil die logarithmischen Glieder wegen des Factors $\frac{1}{i}$ verschwinden. Es folgt daher aus dieser ersten Gleichung nichts Besonderes. Die zweite Gleichung aber giebt:

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}\log(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z) - \frac{1}{i}\log(\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z)}{2\sqrt{-1}},$$

folglich:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\,\sin z}.$$

Hieraus geht hervor, wie man die **imaginären Logarithmen auf Kreisbogen zurückführen** kann.

§ 140.

Da $\frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tang} z$ ist, so drückt sich nach der letzten Formel des vorigen Paragraphen der Bogen z durch seine Tangente folgendermassen aus:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1 + \sqrt{-1}\,\operatorname{tang} z}{1 - \sqrt{-1}\,\operatorname{tang} z}.$$

Nun ist aber nach § 123:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\cdots$$

Setzt man also $x=\sqrt{-1}\operatorname{tang}z$, so ergiebt sich:

$$z=\frac{\operatorname{tang}z}{1}-\frac{\operatorname{tang}^3z}{3}+\frac{\operatorname{tang}^5z}{5}-\frac{\operatorname{tang}^7z}{7}+\cdots$$

Ist also $\operatorname{tang}z=t$, folglich z ein Bogen, dessen Tangente t ist, so dass man ihn also mit $\operatorname{arc\,tang}t$ bezeichnen, d. h. $z=\operatorname{arc\,tang}t$ setzen kann, so ist, wenn die Tangente t bekannt ist, der zu ihr gehörige Bogen:

$$z=\operatorname{arc\,tang}t=\frac{t}{1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\cdots$$

Da nun, wenn die Tangente t gleich dem Radius 1 ist, der Bogen gleich dem Bogen von 45°, also $z=\frac{\pi}{4}$ wird, so hat man:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

und dies ist die Reihe, welche zuerst Leibnitz zur **Berechnung des Kreisumfanges** gegeben hat.

§ 141.

Um nun mittelst der gegebenen Reihe die Länge eines Kreisbogens ohne übergrosse Mühe bestimmen zu können, muss man offenbar für die Tangente t einen hinreichend kleinen Bruch setzen. Sucht man z. B. mittelst dieser Reihe die Länge des Bogens z zu bestimmen, dessen Tangente t gleich $\frac{1}{10}$ ist, so findet man diesen Bogen:

$$z=\frac{1}{10}-\frac{1}{3000}+\frac{1}{500000}-\cdots,$$

und der Wert dieser Reihe lässt sich ohne irgend welche Schwierigkeiten näherungsweise durch einen Decimalbruch darstellen. Indessen kann man daraus, dass man einen solchen Bogen kennt, noch nichts in Bezug auf die Länge des ganzen Umfanges schliessen, da man das Verhältnis nicht angeben kann, in welchem der Bogen, dessen Tangente gleich $\frac{1}{10}$ ist, zu dem ganzen Kreisumfange steht. Man muss daher, um den Umfang zu bestimmen, einen Bogen suchen, der ein aliquoter Teil desselben ist, und dessen Tangente sich durch einen hinreichend kleinen Bruch bequem ausdrücken lässt. Zu diesem Zwecke nimmt man gewöhnlich den Bogen von 30°, dessen Tangente gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, weil die Tangenten der Bogen, welche kleiner sind als 30° und zum Kreisumfange in einem rationalen Verhältnis stehen, allzu

verwickelte irrationale Grössen sind. Da also der Bogen von 30° gleich $\frac{\pi}{6}$ ist, so wird:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}-\cdots,$$

und

$$\pi=\frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}+\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3}+\cdots$$

Aus dieser Reihe hat man den oben im § 126 angegebenen Wert von π mit unglaublicher Mühe berechnet.

§ 142.

So gross ist diese Mühe aber deswegen, weil erstens die einzelnen Glieder irrational sind, sodann deshalb, weil jedes Glied nur ungefähr dreimal kleiner ist als das vorhergehende. Diesem Uebelstande kann man jedoch in folgender Weise abhelfen. Man nehme den Bogen von 45° oder $\frac{\pi}{4}$ und behalte dafür die Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, obwohl dieselbe nur sehr schwach convergirt, bei, teile aber diesen Bogen in zwei andere a und b, so dass $a+b=\frac{\pi}{4}=45°$ ist. Da nun

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b}{1-\operatorname{tang}a\cdot\operatorname{tang}b}$$

ist, so wird:

$$1-\operatorname{tang}a\cdot\operatorname{tang}b=\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b,$$

und daher:

$$\operatorname{tang}b=\frac{1-\operatorname{tang}a}{1+\operatorname{tang}a}.$$

Ist also jetzt $\operatorname{tang}a=\frac{1}{2}$, so wird $\operatorname{tang}b=\frac{1}{3}$, und es lässt sich daher jeder der beiden Bogen a und b durch eine rationale Reihe ausdrücken, die weit besser als die frühere convergirt. Die Summe dieser beiden Reihen liefert den Wert von $\frac{\pi}{4}$, und es ist somit:

$$\pi=4\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\cdots\\ \frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}-\cdots\end{array}\right\}$$

Auf diese Weise hätte man die Länge des halben Kreisumfanges π um vieles leichter finden können, als es mittelst der vorher (§ 141) angeführten Reihe geschehen ist.

9. Capitel.

Von der Aufsuchung der trinomischen Factoren.

§ 143.

Wir haben oben gezeigt, wie die einfachen Factoren irgend einer ganzen Function mittelst der Auflösung der Gleichungen gefunden werden. Ist nämlich irgend eine ganze Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots$ gegeben, deren einfache Factoren von der Form $p - qz$ gesucht werden sollen, so muss offenbar, wenn $p - qz$ ein Factor derselben ist, für $z = \frac{p}{q}$, wodurch der Factor $p - qz = 0$ wird, auch die gegebene Function selbst verschwinden. Wenn demnach $p - qz$ ein Factor oder Divisor der Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots$ ist, so muss notwendig der Ausdruck $\alpha + \frac{\beta p}{q} + \frac{\gamma p^2}{q^2} + \frac{\delta p^3}{q^3} + \frac{\varepsilon p^4}{q^4} + \cdots = 0$ sein. Umgekehrt erhält man daher, wenn sämtliche Wurzeln dieser Gleichung ermittelt sind, für die vorgelegte ganze Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots$ ebenso viele einzelne einfache Factoren von der Form $p - qz$. Zugleich aber geht hieraus hervor, dass sich die Anzahl dieser einfachen Factoren aus dem Exponenten der höchsten Potenz von z bestimmt.

§ 144.

Auf diese Weise lassen sich aber die imaginären Factoren gewöhnlich nur mit grosser Mühe bestimmen, weshalb wir in diesem Capitel für die Aufsuchung der einfachen imaginären Factoren ein besonderes Verfahren angeben werden. Da jedoch die einfachen imaginären Factoren stets derartig sind, dass die Producte aus je zweien reell werden, so werden wir diese imaginären Factoren selbst dadurch finden, dass wir die zweifachen Factoren oder die Factoren von der Form $p - qz + rz^2$, welche zwar selbst

reell, deren einfache Factoren aber imaginär sind, aufsuchen. Wenn dann von der Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots$ die reellen zweifachen Factoren von der trinomischen Form $p - qz + rz^2$ bekannt sind, so erhält man daraus auch alle imaginären Factoren.

§ 145.

Es besitzt aber das Trinom $p - qz + rz^2$ einfache imaginäre Factoren, wenn $4pr > q^2$ oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$ ist. Da nun die Sinus und Cosinus der Winkel kleiner als 1 sind, so wird der Ausdruck $p - qz + rz^2$ einfache imaginäre Factoren besitzen, wenn $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ gleich dem Sinus oder Cosinus irgend eines Winkels ist. Ist daher $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos \operatorname{arc} \varphi$ oder $q = 2\sqrt{pr}\cos\varphi$, so hat das Trinom $p - qz + rz^2$ einfache imaginäre Factoren. Um aber die Wurzelzeichen zu vermeiden, wollen wir lieber die Form $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ anwenden, deren einfache imaginäre Factoren:

$$qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \text{ und } qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

sind. Hieraus geht zugleich hervor, dass beide Factoren einander gleich und reell werden, sobald $\cos\varphi = \pm 1$, also $\sin\varphi = 0$ ist.

§ 146.

Ist also eine ganze Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \ldots$ gegeben, so findet man ihre einfachen imaginären Factoren, indem man die Grössen p und q und den Winkel φ derart bestimmt, dass das Trinom $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ ein Factor der Function wird. Denn alsdann enthält dieselbe die einfachen imaginären Factoren $qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ und $qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$. Es wird daher die gegebene Function verschwinden, sowohl wenn man $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, als auch wenn man $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ setzt. Tut man dies wirklich, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen man sowohl den Bruch $\frac{p}{q}$ als den Bogen φ bestimmen kann.

§ 147.

So beschwerlich auch beim ersten Anblick die für z zu machenden Substitutionen zu sein scheinen, so werden sie doch nach dem, was im vorhergehenden Capitel gelehrt worden ist, ohne die geringste Mühe ausgeführt. Da nämlich gezeigt worden ist, dass

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi$$

ist, so sind für die einzelnen Potenzen von z folgende Ausdrücke einzusetzen:

beim ersten Factor:

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)$$
$$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}\sin 3\varphi)$$
$$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos 4\varphi + \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$$

u. s. w.

beim zweiten Factor:

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi)$$
$$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi - \sqrt{-1}\sin 3\varphi)$$
$$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos 4\varphi - \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$$

u. s. w.

Setzt man der Kürze wegen $\frac{p}{q} = r$ und führt man die Substitutionen wirklich aus, so ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$0 = \begin{Bmatrix} \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots \\ + \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi + \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi + \cdots \end{Bmatrix}$$
$$0 = \begin{Bmatrix} \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots \\ - \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi - \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi - \cdots \end{Bmatrix}.$$

§ 148.

Addirt und subtrahirt man diese beiden Gleichungen und dividirt als dann noch im ersten Falle durch 2, im zweiten durch $2\sqrt{-1}$, so erhält man die beiden reellen Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots$$
$$0 = \beta r\sin\varphi + \gamma r^2\sin 2\varphi + \delta r^3\sin 3\varphi + \cdots,$$

welche auch sogleich aus der gegebenen Function:

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots$$

dadurch abgeleitet werden können, dass man darin für jeden Wert von n zunächst

$$z^n = r^n\cos n\varphi$$

und dann

$$z^n = r^n\sin n\varphi$$

setzt. Denn da $\sin 0\varphi = 0$ und $\cos 0\varphi = 1$ ist, so erhält man für z^0 oder 1 in dem constanten Gliede im ersten Falle 1, im letzten aber 0. Bestimmt man daher aus diesen beiden Gleichungen die unbekannten Grössen r und φ, so ergiebt sich daraus, da $r = \frac{p}{q}$ ist, für unsere Function der trinomische Factor

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$$

und dieser schliesst zwei einfache imaginäre Factoren in sich.

§ 149.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin m\varphi$, die zweite mit $\cos m\varphi$, und addirt und subtrahirt man darauf die erhaltenen Producte, so ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$0 = \alpha\sin m\varphi + \beta r\sin(m+1)\varphi + \gamma r^2\sin(m+2)\varphi + \delta r^3\sin(m+3)\varphi + \cdots$$
$$0 = \alpha\sin m\varphi + \beta r\sin(m-1)\varphi + \gamma r^2\sin(m-2)\varphi + \delta r^3\sin(m-3)\varphi + \cdots$$

Multiplicirt man dagegen die erste Gleichung mit $\cos m\varphi$ und die zweite mit $\sin m\varphi$, so entstehen durch Addition und Subtraction der erhaltenen Producte noch die folgenden beiden Gleichungen:

$$0 = \alpha\cos m\varphi + \beta r\cos(m-1)\varphi + \gamma r^2\cos(m-2)\varphi + \delta r^3\cos(m-3)\varphi + \cdots$$
$$0 = \alpha\cos m\varphi + \beta r\cos(m+1)\varphi + \gamma r^2\cos(m+2)\varphi + \delta r^3\cos(m+3)\varphi + \cdots$$

Aus jedem Paare dieser Gleichungen kann man nun die Unbekannten r und φ bestimmen, und da dies meistens auf mehrere Arten geschehen kann, so erhält man dadurch zugleich mehrere trinomische Factoren, ja man erhält überhaupt alle, welche in der gegebenen Function enthalten sind.

§ 150.

Damit der Nutzen dieser Regeln um so deutlicher hervortrete, wollen wir hier die trinomischen Factoren einiger öfters vorkommender Functionen aufsuchen, damit man sie bei vorkommender Gelegenheit hieraus entnehmen könne. Sollen z. B. von der Function

$$a^n + z^n$$

die trinomischen Factoren von der Form $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ bestimmt werden, so ergeben sich, wenn man $r = \frac{p}{q}$ setzt, die beiden Gleichungen:

$$0 = a^n + r^n\cos n\varphi \quad\text{und}\quad 0 = r^n\sin n\varphi,$$

deren letzte $\sin n\varphi = 0$ giebt. Es ist somit der Bogen $n\varphi$ entweder gleich $(2k+1)\pi$ oder gleich $2k\pi$, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Diese beiden Fälle müssen deshalb unterschieden werden, weil in beiden der Cosinus verschieden, nämlich im ersten Falle $\cos(2k+1)\pi = -1$, im letzteren dagegen $\cos 2k\pi = +1$ ist. Offenbar aber muss hier der erste Wert

$$n\varphi = (2k+1)\pi$$

genommen werden, da alsdann $\cos n\varphi = -1$, folglich $0 = a^n - r^n$ oder

$$r = a = \frac{p}{q}$$

wird. Es ist also:

$$p=a,\quad q=1 \text{ und } \varphi=\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

und daher:

$$a^2-2az\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+z^2$$

ein Factor der Function a^n+z^n. Da man nun für k jede beliebige ganze Zahl setzen kann, so erhält man dadurch mehrere Factoren, deren Anzahl aber deswegen nicht unendlich gross ist, weil die ersten Factoren wiederkehren, wenn $2k+1$ über n hinaus wächst, indem nämlich $\cos(2\pi\pm\varphi)=\cos\varphi$ ist. Dies wird aus den Beispielen noch deutlicher werden. Ist ferner n eine ungerade Zahl, und nimmt man $2k+1=n$, so wird der obige Factor ein Quadrat, nämlich $a^2+2az+z^2$; indessen folgt daraus nicht, dass nun das Quadrat $(a+z)^2$ ein Factor der Function a^n+z^n ist, weil man in diesem Falle nach § 148 nur eine einzige Gleichung erhält, aus der hervorgeht, dass nur $a+z$ ein Teiler der Function a^n+z^n ist. Diese Regel muss man stets vor Augen behalten, so oft $\cos\varphi$ entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist.

Beispiel.

Um diese Factoren deutlicher vor Augen zu haben, wollen wir einige Fälle betrachten und dabei dieselben in zwei Klassen teilen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Ist $n=1$, so hat die Function: $a+z$ den Factor: $a+z$	Ist $n=2$, so hat die Function: a^2+z^2 den Factor: a^2+z^2
Ist $n=3$, so hat die Function: a^3+z^3 die Factoren: $a^2-2az\cos\frac{\pi}{3}+z^2$ $a+z$	Ist $n=4$, so hat die Function: a^4+z^4 die Factoren: $a^2-2az\cos\frac{\pi}{4}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{3\pi}{4}+z^2$
Ist $n=5$, so hat die Function: a^5+z^5 die Factoren: $a^2-2az\cos\frac{\pi}{5}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{3\pi}{5}+z^2$ $a+z$	Ist $n=6$, so hat die Function: a^6+z^6 die Factoren: $a^2-2az\cos\frac{\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{3\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{5\pi}{6}+z^2$

Aus diesen Beispielen geht hervor, dass man alle Factoren erhält, wenn man für $2k+1$ alle ungeraden Zahlen, die nicht grösser als der Exponent n sind, setzt, dass man aber in den Fällen, wo sich ein quadratischer Factor ergiebt, bloss dessen Wurzel den Factoren zurechnen darf.

§ 151.

Ist ferner die Function

$$a^n-z^n$$

gegeben, so wird dieselbe den trinomischen Factor $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ besitzen, sobald für $r=\frac{p}{q}$ die Unbekannten r und φ aus den Gleichungen:

$$0=a^n-r^n\cos n\varphi \text{ und } 0=r^n\sin n\varphi$$

bestimmt sind. Es ist daher wiederum $\sin n\varphi=0$, und somit entweder $n\varphi=(2k+1)\pi$ oder $n\varphi=2k\pi$. In diesem Falle ist jedoch der letztere Wert zu nehmen, so dass $\cos n\varphi=+1$, folglich $0=a^n-r^n$ oder $r=\frac{p}{q}=a$ ist. Man erhält daher:

$$p=a,\quad q=1,\quad \varphi=\frac{2k\pi}{n},$$

woraus sich

$$a^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+z^2$$

als trinomischer Factor der vorliegenden Function ergiebt. Setzt man in dieser Formel für $2k$ alle geraden Zahlen, die nicht grösser als n sind, so erhält man dadurch zugleich sämtliche Factoren. Dabei ist aber in Betreff der quadratischen Factoren das, was vorher darüber gesagt wurde, festzuhalten. Nimmt man also zunächst $k=0$, so ergiebt sich der Factor $a^2-2az+z^2$, an dessen Stelle aber die Wurzel $a-z$ zu setzen ist; ebenso geht aus dem Factor $a^2+2az+z^2$, der sich ergiebt, wenn n eine gerade Zahl und $2k=n$ ist, hervor, dass dann $a+z$ ein Teiler der Function a^n-z^n ist.

Beispiel.

Auch hier ergeben sich ebenso wie vorher zwei Fälle, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Ist $n=1$, so hat die Function: $a-z$ den Factor: $a-z$	Ist $n=2$, so hat die Function: a^2-z^2 die Factoren: $a-z$ $a+z$
Ist $n=3$, so hat die Function: a^3-z^3 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{3}+z^2$	Ist $n=4$, so hat die Function: a^4-z^4 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{4}+z^2$ $a+z$
Ist $n=5$, so hat die Function: a^5-z^5 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{5}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{4\pi}{5}+z^2$	Ist $n=6$, so hat die Function: a^6-z^6 die Factoren: $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{4\pi}{6}+z^2$ $a+z$

§ 152.

Hierdurch wird die bereits im § 32 aufgestellte Behauptung, dass sich **jede ganze Function wenn nicht in einfache, so doch in zweifache reele Factoren zerlegen** lasse, bestätigt. Denn wie wir sahen, kann man immer sowohl die einfachen als die zweifachen reellen Factoren der Function $a^n \pm z^n$, in welcher n eine beliebige ganze positive Zahl ist, bestimmen. Gehen wir nun zu **zusammengesetzteren** Functionen, z. B. zu Functionen von der Form $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$ über, so ist deren Zerlegung aus dem Vorhergehenden hinlänglich klar, sobald sie zwei reelle Factoren von der Form $\eta+\vartheta z^n$ besitzen. Es braucht daher hier nur gezeigt zu werden, wie man die Function $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$ in dem Falle, wo sie nicht zwei reelle Factoren von der Form $\eta+\vartheta z^n$ hat, in reelle, sei es einfache, sei es zweifache Factoren, zerlegen könne.

§ 153.

Wir betrachten also die Function

$$a^{2n}-2a^nz^n\cos g+z^{2n},$$

welche sich nicht in zwei reelle Factoren von der Form $\eta+\vartheta z^n$ zerlegen lässt. Nehmen wir nun an, es sei $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ ein zweifacher reeller Factor derselben, und setzt man $r=\frac{p}{q}$, so hat man die folgenden beiden Gleichungen aufzulösen:

$$0=a^{2n}-2a^nr^n\cos g\cos n\varphi+r^{2n}\cos 2n\varphi$$
$$0=\qquad -2a^nr^n\cos g\sin n\varphi+r^{2n}\sin 2n\varphi.$$

Statt der ersten dieser beiden Gleichungen kann man aber auch nach § 148 (wenn man darin $m=2n$ setzt) die folgende nehmen:

$$0=a^{2n}\sin 2n\varphi-2a^nr^n\cos g\sin n\varphi.$$

Die Vergleichung dieser mit der zweiten der obigen Gleichungen ergiebt $r=a$ und somit:

$$\sin 2n\varphi=2\cos g\sin n\varphi$$

oder, da $\sin 2n\varphi=2\sin n\varphi\cos n\varphi$ ist,

$$\cos n\varphi=\cos g.$$

Nun ist aber $\cos(2k\pi\pm g)=\cos g$; folglich erhält man aus dieser Gleichung:

$$n\varphi=2k\pi\pm g \text{ und } \varphi=\frac{2k\pi\pm g}{n}.$$

Es ist daher

$$a^2-2az\cos\frac{2k\pi\pm g}{n}+z^2$$

die allgemeine Form der zweifachen reellen Factoren der gegebenen Function, und zwar erhält man daraus sämtliche derartige Factoren, wenn man für $2k$ der Reihe nach alle geraden Zahlen, die nicht grösser als n sind, einsetzt, wie man dies aus der Anwendung des Gesagten auf besondere Fälle ersehen wird.

Beispiel.

Um die Beschaffenheit dieser Factoren anschaulich zu machen, wollen wir die Fälle betrachten, in denen n gleich 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist. Es hat also

die Function:

$$a^2-2az\cos g+z^2$$

den einzigen Factor:

$$a^2-2az\cos g+z^2$$

die Function:
$$a^4 - 2a^2z^2\cos g + z^4$$
die beiden Factoren:
$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{2} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi \pm g}{2} + z^2 \quad\text{oder}\quad a^2 + 2az\cos\frac{g}{2} + z^2$$

---

die Function:
$$a^6 - 2a^3z^3\cos g + z^6$$
die drei Factoren:
$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{3} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{3} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{3} + z^2$$

---

die Function:
$$a^8 - 2a^4z^4\cos g + z^8$$
die vier Factoren:
$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{4} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{4} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{4} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi \pm g}{4} + z^2 \quad\text{oder}\quad a^2 + 2az\cos\frac{g}{4} + z^2$$

---

die Function:
$$a^{10} - 2a^5z^5\cos g + z^{10}$$
die fünf Factoren:
$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{5} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{5} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{5} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi - g}{5} + z^2$$
$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi + g}{5} + z^2.$$

Es wird daher auch durch diese Beispiele bestätigt, dass sich jede ganze Function in reelle einfache oder zweifache Factoren zerlegen lässt.

§ 154.

Von hier aus kann man weiter zu Functionen von der Form:
$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$$
übergehen, welche jederzeit einen reellen Factor von der Form $\eta + \vartheta z^n$, dessen reelle einfache oder zweifache Factoren sich finden lassen, besitzen. Was aber den anderen Factor, welcher die Form $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$ hat, betrifft, so kann man ihn, er mag beschaffen sein, wie er will, immer nach dem vorhergehenden Paragraphen in Factoren zerlegen. Ferner kann auch die Function:
$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n},$$
da sie stets zwei reelle Factoren von der Form $\eta + \vartheta z^n + \iota z^{2n}$ besitzt, in ähnlicher Weise in reelle einfache oder zweifache Factoren zerlegt werden. Ja man kann auch zu Functionen von der Form:
$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}$$
fortschreiten; denn da diese immer einen reellen Factor von der Form $\eta + \vartheta z^n$ haben, während der andere Factor unter die vorhergehende Form gehört, so ist auch bei diesen Functionen die Zerlegung in reelle, seien es einfache, seien es zweifache, Factoren möglich. Wenn daher hinsichtlich einer derartigen Zerlegbarkeit aller ganzen Functionen bisher noch irgend ein Zweifel geblieben wäre, so dürfte derselbe hierdurch nunmehr vollständig beseitigt sein.

§ 155.

Diese **Zerlegung in Factoren** lässt sich nun aber auch auf die **unendlichen Reihen übertragen.** Denn da wir gesehen haben, dass
$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = e^x$$
und
$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$$
ist, wenn i eine unendlich grosse Zahl bedeutet, so besitzt offenbar die Reihe:
$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

unendlich viele einander gleiche Factoren von der Form $1+\frac{x}{i}$. Zieht man aber von dieser Reihe das erste Glied 1 ab, so wird

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=e^x-1=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-1;$$

und vergleicht man diese Form mit der des § 151, wodurch sich

$$a=1+\frac{x}{i},\quad n=i \text{ und } z=1$$

ergiebt, so wird die allgemeine Form der Factoren:

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i}+1$$

sein, woraus sich denn gleichzeitig alle Factoren herleiten lassen, wenn man für $2k$ der Reihe nach sämtliche geraden Zahlen setzt. Setzt man nun $2k=0$, so erhält man den quadratischen Factor $\frac{x^2}{i^2}$, für welchen man jedoch aus den im § 150 angegebenen Gründen nur die Wurzel $\frac{x}{i}$ zu nehmen hat. Es ist daher x, wie sich übrigens von selbst versteht, ein Factor des Ausdrucks e^x-1. Um die übrigen Factoren zu finden, muss man beachten, dass der Bogen $\frac{2k\pi}{i}$ unendlich klein ist, und somit nach § 134:

$$\cos\frac{2k\pi}{i}=1-\frac{2k^2\pi^2}{i^2}$$

gesetzt werden kann, indem die übrigen Glieder wegen der unendlich grossen Zahl i verschwinden. Es ist daher:

$$\frac{x^2}{i^2}+\frac{4k^2}{i^2}\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{i^3}x$$

ein beliebiger Factor und mithin die Function e^x-1 teilbar durch:

$$1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4k^2\pi^2}.$$

Folglich besitzt der Ausdruck:

$$e^x-1=x\left(1+\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\right)$$

ausser x noch die unendlich vielen Factoren:

$$\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{64\pi^2}\right)\cdots$$

§ 156.

Obwohl hierin die einzelnen Factoren den unendlich kleinen Teil $\frac{x}{i}$ enthalten, so darf derselbe doch nicht weggelassen werden, weil sich aus ihm nach ausgeführter Multiplikation aller Factoren, deren Anzahl gleich $\frac{1}{2}i$ ist, das Glied $\frac{x}{2}$ ergeben würde. Um dieser Unbequemlichkeit aus dem Wege zu gehen, wollen wir den Ausdruck:

$$e^x-e^{-x}=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-\left(1-\frac{x}{i}\right)^i=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right),$$

welcher durch Subtraction der beiden Reihen:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

und

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

entsteht, betrachten. Die Vergleichung desselben mit der Formel des § 151 liefert:

$$n=i,\quad a=1+\frac{x}{i},\quad z=1-\frac{x}{i},$$

so dass sich als allgemeiner Factor des angeführten Ausdrucks der folgende:

$$a^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{i},$$

oder da

$$\cos\frac{2k\pi}{i}=1-\frac{2k^2\pi^2}{i^2}$$

ist, der folgende:

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4k^2\pi^2}{i^2}-\frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4}$$

ergiebt. Es ist mithin die Function e^x-e^{-x} durch

$$1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}$$

teilbar. Hierin aber kann man sicher den Teil $\frac{x^2}{i^2}$ weglassen, weil derselbe auch mit i multiplicirt immer noch unendlich klein bleibt. Setzt man nun überdies $k=0$, so wird der erste Factor wie vorher gleich x. Es wird daher, nachdem man jene Factoren in die richtige Reihenfolge gebracht hat:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$=x\left(1+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots\right).$$

Dabei ist nämlich jedem einzelnen Factor durch Multiplikation mit einer gewissen Constanten eine solche Form gegeben worden, dass man bei wirklicher Ausführung der Multiplikation als erstes Glied x erhält.

§ 157.

Da ferner

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=\frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i+\left(1-\frac{x}{i}\right)^i}{2}$$

ist, so ergiebt sich durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem früheren a^n+z^n des § 150:

$$a=1+\frac{x}{i},\quad z=1-\frac{x}{i},\quad n=i,$$

und es wird daher der allgemeine Factor:

$$a^2-2az\cos\frac{2k+1}{i}\pi+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k+1}{i}\pi.$$

Da nun aber:

$$\cos\frac{2k+1}{i}\pi=1-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2i^2}$$

ist, so erhält dadurch jener Factor die Form:

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{(2k+1)^2\pi^2}{i^2},$$

indem das Glied mit dem Nenner i^4 verschwindet. Weil aber jeder Factor des Ausdrucks

$$1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

die Form $1+\alpha x^2$ haben muss, so muss man den gefundenen Factor, um ihn auf diese Form zu bringen, noch durch $\frac{(2k+1)^2\pi^2}{i^2}$ dividiren, wodurch er alsdann die Form annimmt:

$$1+\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Hieraus findet man sämtliche unendlich vielen Factoren, wenn man für $2k+1$ der Reihe nach alle ungeraden Zahlen setzt, und es wird somit:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$
$$=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

§ 158.

Ist x eine imaginäre Zahlgrösse, so gehen diese **Exponentialformeln** in den **Sinus** und **Cosinus** irgend eines reellen Bogens über. Denn ist $x=z\sqrt{-1}$, so wird:

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}}-e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin z=z-\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{z^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots$$

und dieser Ausdruck ist gleich dem Product aus den unendlich vielen Factoren:

$$z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

oder es ist:

$$\sin z=z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\cdots$$

So oft daher der Bogen z so beschaffen ist, dass irgend einer dieser Factoren verschwindet, was geschieht, wenn $z=0$, $z=\pm\pi$, $z=\pm 2\pi$, und allgemein, wenn $z=\pm k\pi$ ist, wo k jede ganze Zahl bedeutet, so wird auch zugleich der Sinus dieses Bogens gleich 0 sein, eine bekannte Tatsache, auf Grund deren man auch umgekehrt jene Factoren hätte finden können.

Ebenso erhält man, da

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}{2}=\cos z$$

ist, die Formel:

$$\cos z=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\cdots,$$

oder auch, indem man jeden Factor in zwei zerlegt:

$$\cos z=\left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{5\pi}\right)\cdots,$$

woraus ebenso wie vorher folgt, dass $\cos z=0$ ist, sobald $z=\pm\frac{2k+1}{2}\pi$ ist, eine Eigenschaft, die auch aus der Natur des Kreises sich ergiebt.

§ 159.

Der § 153 giebt die Mittel an die Hand, auch die Factoren des Ausdrucks:

$$e^x-2\cos g+e^{-x}=2\left(1-\cos g+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\right)$$

zu finden. Da nämlich dieser Ausdruck in der Form:

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^i - 2\cos g + \left(1-\frac{x}{i}\right)^i$$

geschrieben werden kann, so ergiebt sich durch Vergleichung desselben mit der Formel des § 153:

$$2n = i, \quad a = 1 + \frac{x}{i}, \quad z = 1 - \frac{x}{i},$$

und es wird daher der allgemeine Factor dieser Function:

$$a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi \pm g}{n} + z^2 = 2 + \frac{2x^2}{i^2} - 2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2(2k\pi \pm g)}{i}.$$

Da nun aber:

$$\cos\frac{2(2k\pi \pm g)}{i} = 1 - \frac{2(2k\pi \pm g)^2}{i^2}.$$

ist, so erhält man dafür die Form:

$$\frac{4x^2}{i^2} + \frac{4(2k\pi \pm g)^2}{i^2},$$

oder auch die folgende:

$$1 + \frac{x^2}{(2k\pi \pm g)^2}.$$

Dividirt man daher die gegebene Formel durch $2(1-\cos g)$, damit das constante Glied der unendlichen Reihe gleich 1 werde, so erhält man, indem man alle Factoren nimmt:

$$\frac{e^x - 2\cos g + e^{-x}}{2(1-\cos g)}$$

$$= \left(1+\frac{x^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi+g)^2}\right)\ldots$$

Setzt man nun hierin $z\sqrt{-1}$ für x, so ergiebt sich:

$$\frac{\cos z - \cos g}{1-\cos g}$$

$$= \left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1+\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi+g}\right)\times$$

$$\left(1-\frac{z}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi-g}\right)\ldots$$

$$= 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2(1-\cos g)} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1-\cos g)} - \frac{z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(1-\cos g)} + \ldots$$

Von dieser ins Unendliche fortgehenden Reihe sind daher sämtliche Factoren bekannt.

§ 160.

Auch von der Function $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ lassen sich sämtliche Factoren sehr bequem finden und darstellen. Verwandelt man dieselbe nämlich in die Form:

$$\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i,$$

und vergleicht man diese mit der Formel $a^i \pm z^i$ des § 150 resp. 151, so erhält man als allgemeinen Factor $a^2 - 2az\cos\frac{m\pi}{i} + z^2$, wobei m eine ungerade oder eine gerade Zahl bedeutet, je nachdem das obere oder das untere Zeichen genommen wird. Da aber i eine unendlich grosse Zahl, und demnach

$$\cos\frac{m\pi}{i} = 1 - \frac{m^2\pi^2}{2i^2}$$

ist, so wird jener allgemeine Factor:

$$(a-z)^2 + \frac{m^2\pi^2}{i^2}az.$$

In unserm Falle ist nun

$$a = 1 + \frac{b+x}{i} \text{ und } z = 1 + \frac{c-x}{i},$$

demnach:

$$(a-z)^2 = \frac{(b-c+2x)^2}{i^2},$$

und

$$az = 1 + \frac{b+c}{i} + \frac{bc + (c-b)x - x^2}{i^2}.$$

Es wird daher der allgemeine Factor, nachdem derselbe mit i^2 multiplicirt und darauf die Glieder mit dem Nenner i und i^2 vernachlässigt sind, weil dieselben im Vergleich zu den übrigen verschwinden, gleich:

$$(b-c)^2 + 4(b-c)x + 4x^2 + m^2\pi^2$$

oder, nachdem das constante Glied durch Division mit $(b-c)^2 + m^2\pi^2$ auf 1 gebracht ist, gleich:

$$1 + \frac{4(b-c)x + 4x^2}{m^2\pi^2 + (b-c)^2}.$$

§ 161.

Da nunmehr das constante Glied jedes einzelnen Factors gleich 1 ist, muss man auch die Function $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ durch eine Constante von solcher Beschaffenheit dividiren, dass dadurch das constante Glied des Ausdrucks,

d. h. der Wert desselben für $x=0$ gleich 1 wird. Dieser Divisor ist ab $e^b \pm e^c$, und es kann somit der **Ausdruck**:

$$\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$$

durch ein **Product von unendlich vielen Factoren** dargestellt werden Es wird nämlich, wenn das obere Zeichen genommen wird, und demnach eine **ungerade** Zahl bedeutet:

$$\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c}$$

$$=\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{9\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{25\pi^2+(b-c)^2}\right)\cdots$$

Ist dagegen das untere Zeichen gültig, und demnach m eine **gerade** Zahl so erhält man, vorausgesetzt, dass im Falle $m=0$ die Wurzel des sich ergebenden quadratischen Factors gesetzt wird:

$$\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c}$$

$$=\left(1+\frac{2x}{b-c}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{4\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{16\pi^2+(b-c)^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{36\pi^2+(b-c)^2}\right)\cdots$$

§ 162.

Setzt man $b=0$, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, so wird:

$$\frac{e^x+e^c\,e^{-x}}{1+e^c}=\left(1-\frac{4cx-4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

und:

$$\frac{e^x-e^c\,e^{-x}}{1-e^c}=\left(1-\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Ferner erhält man, wenn man c negativ nimmt, die beiden Gleichungen:

$$\frac{e^x+e^{-c}e^{-x}}{1+e^{-c}}=\left(1+\frac{4cx+4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

und:

$$\frac{e^x-e^{-c}e^{-x}}{1-e^{-c}}$$

$$=\left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Multiplicirt man nun die erste dieser Formeln mit der dritten, so ergiebt sich:

$$\frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}},$$

und wenn man hierin y für $2x$ schreibt, so wird:

$$\frac{e^y+e^{-y}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{2cy-y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Multiplicirt man aber die erste Formel mit der vierten, so wird das Product:

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}},$$

und setzt man hierin wieder y für $2x$, so erhält man:

$$\frac{e^y-e^{-y}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}}$$

$$=\left(1+\frac{y}{c}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{2cy-y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Dieselbe Gleichung, nur dass darin c negativ genommen werden muss, ergiebt sich, wenn man die zweite Formel mit der dritten multiplicirt; es wird nämlich:

$$\frac{e^c-e^{-c}-e^y+e^{-y}}{e^c-e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2cy+y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

Multiplicirt man endlich die zweite Formel mit der vierten, so folgt:

$$\frac{e^y+e^{-y}-e^c-e^{-c}}{2-e^c-e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

§ 163.

Diese vier Combinationen lassen sich nunmehr sehr bequem auf den Kreis anwenden, wenn man $c = g\sqrt{-1}$ und $y = v\sqrt{-1}$ setzt. Denn es wird alsdann:

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2\cos v$$
$$e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin v$$
$$e^{g\sqrt{-1}} + e^{-g\sqrt{-1}} = 2\cos g$$
$$e^{g\sqrt{-1}} - e^{-g\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin g.$$

Es giebt daher die erste Combination die Formel:

$$\frac{\cos v + \cos g}{1+\cos g}$$
$$= 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2(1+\cos g)} + \frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1+\cos g)} - \frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6(1+\cos g)} + \cdots$$
$$= \left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2gv-v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$= \left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$
$$= \left(1-\frac{v^2}{(\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi+g)^2}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{v^2}{(5\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(5\pi+g)^2}\right)\cdots$$

Die vierte Combination dagegen liefert die Formel:

$$\frac{\cos v - \cos g}{1-\cos g}$$
$$= 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2\cdot(1-\cos g)} + \frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1-\cos g)} - \frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\,(1-\cos g)} + \cdots$$
$$= \left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2gv-v^2}{36\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{36\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$= \left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$
$$= \left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(4\pi+g)^2}\right)\cdots$$

Die zweite Combination giebt:

$$\frac{\sin g + \sin v}{\sin g}$$
$$= 1 + \frac{v}{\sin g} - \frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\sin g} + \frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\sin g} - \cdots$$
$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\cdots$$

Nimmt man hierin endlich v negativ, so erhält man das, was die dritte Combination ergeben würde.

§ 164.

Es können aber auch die Ausdrücke des § 162 selbst folgendermassen auf Kreisbogen angewandt werden. Da nämlich:

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1+e^c} = \frac{(1+e^{-c})(e^x + e^c e^{-x})}{2+e^c+e^{-c}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{c-x} + e^{-c+x}}{2+e^c+e^{-c}}$$

ist, so geht dieser Ausdruck, wenn man darin $c = g\sqrt{-1}$ und $x = z\sqrt{-1}$ setzt, über in den folgenden:

$$\frac{\cos z + \cos(g-z)}{1+\cos g} = \cos z + \frac{\sin g \sin z}{1+\cos g}$$

und da

$$\frac{\sin g}{1+\cos g} = \operatorname{tang}\frac{g}{2}$$

ist, so wird:

$$\cos z + \operatorname{tang}\frac{g}{2}\sin z$$
$$= 1 + \frac{z}{1}\operatorname{tang}\frac{g}{2} - \frac{z^2}{1\cdot2} - \frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}\operatorname{tang}\frac{g}{2} + \frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{z^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\operatorname{tang}\frac{g}{2} - \cdots$$
$$= \left(1+\frac{4gz-4z^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{25\pi^2-g^2}\right)\cdots$$
$$= \left(1+\frac{2z}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{5\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi+g}\right)\cdots$$

Ebenso geht der zweite Ausdruck, wenn man Zähler und Nenner desselben mit $1-e^{-c}$ multiplicirt, über in:

$$\frac{e^x + e^{-x} - e^{c-x} - e^{-c+x}}{2-e^c-e^{-c}},$$

und setzt man hierin wieder $c = g\sqrt{-1}$ und $x = z\sqrt{-1}$; so bekommt man:

$$\frac{\cos z - \cos(g-z)}{1-\cos g} = \cos z - \frac{\sin g \sin z}{1-\cos g} = \cos z - \frac{\sin z}{\operatorname{tang}\frac{g}{2}}.$$

Es ist demnach:

$$\cos z - \cot\frac{g}{2}\cdot\sin z$$

$$= 1 - \frac{z}{1}\cot\frac{g}{2} - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cot\frac{g}{2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cot\frac{g}{2} + \cdots$$

$$= \left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{36\pi^2-g^2}\right)\cdots$$

$$= \left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{2z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{4\pi+g}\right)\cdots$$

Setzt man daher noch $v = 2z$ oder $z = \frac{1}{2}v$, so hat man:

$$\frac{\cos\frac{g-v}{2}}{\cos\frac{g}{2}} = \cos\frac{v}{2} + \operatorname{tang}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$= \left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{g+v}{2}}{\cos\frac{g}{2}} = \cos\frac{v}{2} - \operatorname{tang}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$= \left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{g-v}{2}}{\sin\frac{g}{2}} = \cos\frac{v}{2} - \cot\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$= \left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{g+v}{2}}{\sin\frac{g}{2}} = \cos\frac{v}{2} + \cot\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

Das Gesetz, nach welchem diese Factoren fortschreiten, ist hinlänglich einfach und leicht zu übersehen. Durch Multiplikation je zweier von diesen Ausdrücken kann man wieder diejenigen ableiten, welche wir schon im vorhergehenden Paragraphen gefunden haben.

10. Capitel.

Von dem Gebrauche der gefundenen Producte bei der Bestimmung der Summen unendlicher Reihen.

§ 165.

Wenn

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\cdots$$

ist, so **müssen diese Factoren**, mag deren Anzahl eine endliche oder unendliche sein, eben **jenen Ausdruck** $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ **wieder hervorbringen**, wenn man sie wirklich mit einander multiplicirt. Es muss daher, wie aus der gemeinen Algebra bekannt ist, der Coefficient

A gleich der Summe aller Grössen $\alpha, \beta, \ldots$ also gleich $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots$

B gleich der Summe der Producte aus je zweien also gleich $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \ldots$,

C gleich der Summe der Producte aus je dreien also gleich $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \ldots$,

D gleich der Summe der Producte aus je vieren,

E gleich der Summe der Producte aus je fünfen von diesen Grössen u. s. w. sein.

§ 166.

Da nun die Summe der Grössen $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$ und die Summe der Producte aus je zweien von ihnen bekannt ist, so kann man daraus auch die Summe der Quadrate $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots$ finden, da dieselbe gleich dem Quadrate der Summe aller Grössen weniger der doppelten Summe der Producte aus je zweien ist. Ebenso kann man die Summe der Kuben, der vierten und der höheren Potenzen bestimmen. Denn wenn man:

$$\begin{aligned}
P &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots \\
Q &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \cdots \\
R &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \cdots \\
S &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \cdots \\
T &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \cdots \\
V &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \varepsilon^6 + \cdots \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

setzt, so ergeben sich die Werte von $P, Q, R, S, T, V \ldots$ aus den bekannten Grössen $A, B, C, D \ldots$ auf folgende Art:

$$\begin{aligned}
P &= A \\
Q &= AP - 2B \\
R &= AQ - BP + 3C \\
S &= AR - BQ + CP - 4D \\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E \\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F
\end{aligned}$$

u. s. w.

Von der Richtigkeit dieser Formeln überzeugt man sich bei angestellter Prüfung leicht; indessen wird dieselbe in der Differentialrechnung in aller Strenge erwiesen werden.

§ 167.

Da wir nun oben § 156 gefunden haben, dass

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x\left(1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots\right) \\
&= x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} &+ \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

oder, wenn man $x^2 = \pi^2 z$ setzt,

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3} z &+ \frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} z^2 + \frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} z^3 + \cdots \\
&= (1+z)\left(1 + \frac{1}{4}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{16}z\right)\left(1 + \frac{1}{25}z\right)\cdots
\end{aligned}$$

Wendet man nun hierauf die oben angegebene Regel an, so ist:

$$A = \frac{\pi^2}{6}, \quad B = \frac{\pi^4}{120}, \quad C = \frac{\pi^6}{5040}, \quad D = \frac{\pi^8}{362880}, \quad \text{u. s. w.}$$

und es bestimmen sich daher, wenn man

$$\begin{aligned}
P &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots \\
Q &= 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \cdots \\
R &= 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \cdots \\
S &= 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \cdots \\
T &= 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \cdots
\end{aligned}$$

u. s. w.

setzt, die Werte dieser Grössen aus A, B, C, D u. s. w. wie folgt:

$$P = \frac{\pi^2}{6}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$

$$R = \frac{\pi^6}{945}$$

$$S = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

u. s. w.

§ 168.

Es geht hieraus hervor, dass man die Summen aller unendlichen Reihen, welche in der allgemeinen Form:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

enthalten sind, mittelst des halben Kreisumfanges π ausdrücken kann, so oft n eine gerade Zahl ist; es steht nämlich immer die Summe einer solchen Reihe zu π^n in einem rationalen Verhältnis. Um aber den Wert dieser Reihen deutlicher vor Augen zu haben, wollen wir einige davon, auf bequemere Weise ausgedrückt, hierher setzen:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\cdots=\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\cdots=\frac{2^8}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\cdots=\frac{2^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\cdots=\frac{2^{12}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\cdots=\frac{2^{14}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\cdots=\frac{2^{16}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\cdots=\frac{2^{18}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\cdots=\frac{2^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\cdots=\frac{2^{22}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\cdots=\frac{2^{24}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

Bis hierher liessen sich die Coefficienten der Potenzen von π mittelst eines an einem andern Orte zu erklärenden Kunstgriffes fortsetzen. Ich habe dieselben indess aus dem Grunde hier beigebracht, weil die beim ersten Anblick ziemlich unregelmässige Reihe der Brüche 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{691}{105}$, $\frac{35}{1}$ u. s. w. bei sehr vielen Gelegenheiten gebraucht wird.

§ 169.

Behandeln wir die im § 157 gefundene Gleichung, nach welcher

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$
$$=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

ist, auf dieselbe Weise, so wird, wenn $x^2=\frac{\pi^2}{4}z$ gesetzt wird:

$$1+\frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 4}z+\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2}z^2+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 4^3}z^3+\cdots$$
$$=(1+z)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\left(1+\frac{1}{49}z\right)\cdots,$$

und somit:

$$A=\frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 4},\quad B=\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2},\quad C=\frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 4^3},\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man daher:

$$P=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots$$
$$Q=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{81^2}+\cdots$$
$$R=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{81^3}+\cdots$$
$$S=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\cdots$$

u. s. w.,

so findet man für P, Q, R, S u. s. w. die Werte:

$$P=\frac{1}{1}\frac{\pi^2}{2^3}$$
$$Q=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\pi^4}{2^5}$$
$$R=\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{\pi^6}{2^7}$$
$$S=\frac{272}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\cdot\frac{\pi^8}{2^9}$$
$$T=\frac{7936}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\cdot\frac{\pi^{10}}{2^{11}}$$
$$V=\frac{353792}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\cdot\frac{\pi^{12}}{2^{13}}$$
$$W=\frac{22368256}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\cdot\frac{\pi^{14}}{2^{15}}.$$

u. s. w.

§ 170.

Diese Summen der Potenzen der ungeraden Zahlen lassen sich auch aus den früheren Summen finden, in welchen alle Zahlen vorkamen. Ist nämlich:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots,$$

so erhält man hieraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{2^n}$:

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

in welcher Reihe nunmehr nur alle geraden Zahlen vorkommen. Zieht man daher die letztere von der ersten ab, so erhält man eine Reihe, welche nur die ungeraden Zahlen enthält, nämlich:

$$M - \frac{M}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \cdots$$

Multiplicirt man aber $\frac{M}{2^n}$ mit 2 und subtrahirt es sodann von M, so erhält man eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen, nämlich:

$$M - \frac{2M}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \cdots$$

Nach den angegebenen Regeln kann man daher die Summen von Reihen wie:

$$1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} \pm \cdots$$

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots$$

bestimmen, sobald n eine gerade Zahl ist, und zwar sind diese Summen gleich $A\pi^n$, wo A eine rationale Zahl bedeutet.

§ 171.

Ausserdem aber geben die im § 164 abgeleiteten Ausdrücke ebenfalls sehr merkwürdige Reihen. Da nämlich:

$$\cos\frac{v}{2} + \operatorname{tang}\frac{g}{2}\,\sin\frac{v}{2} = \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi - g}\right)\cdots$$

ist, so wird, wenn wir $v = \frac{x}{n}\pi$ und $g = \frac{m}{n}\pi$ setzen:

$$\left(1 + \frac{x}{n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{n+m}\right)\left(1 + \frac{x}{3n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{3n+m}\right)\left(1 + \frac{x}{5n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{5n+m}\right)\cdots$$

$$= \cos\frac{x\pi}{2n} + \operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{x\pi}{2n}$$

$$= 1 + \frac{\pi x}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi^2 x^2}{2 \cdot 4 n^2} - \frac{\pi^3 x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 n^3}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4 x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 n^4} + \cdots$$

Vergleicht man aber diesen ins Unendliche fortgehenden Ausdruck mit dem des § 165, so erhält man die Werte:

$$A = \frac{\pi}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n},\quad B = -\frac{\pi^2}{2 \cdot 4 n^2},\quad C = -\frac{\pi^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 n^3}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n},\quad D = \frac{\pi^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 n^4}$$

$$E = \frac{\pi^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 n^5}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist:

$$\alpha = \frac{1}{n-m},\quad \beta = -\frac{1}{n+m},\quad \gamma = \frac{1}{3n-m},\quad \delta = -\frac{1}{3n+m},\quad \varepsilon = \frac{1}{5n-m},$$

$$\zeta = -\frac{1}{5n+m} \text{ u. s. w.}$$

§ 172.

Hieraus ergeben sich nach § 166 folgende Reihen:

$$P = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \cdots$$

$$Q = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \frac{1}{(5n-m)^2} + \frac{1}{(5n+m)^2} + \cdots$$

$$R = \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} + \frac{1}{(3n-m)^3} - \frac{1}{(3n+m)^3} + \frac{1}{(5n-m)^3} - \frac{1}{(5n+m)^3} + \cdots$$

$$S = \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(3n-m)^4} + \frac{1}{(3n+m)^4} + \frac{1}{(5n-m)^4} + \frac{1}{(5n+m)^4} + \cdots$$

$$T = \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} + \frac{1}{(3n-m)^5} - \frac{1}{(3n+m)^5} + \frac{1}{(5n-m)^5} - \frac{1}{(5n+m)^5} + \cdots$$

$$V = \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(3n-m)^6} + \frac{1}{(3n+m)^6} + \frac{1}{(5n-m)^6} + \frac{1}{(5n+m)^6} + \cdots$$

u. s. w.,

und zwar wird, wenn man $\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = k$ setzt:

$$P = A = \frac{k\pi}{2n} \qquad = \frac{k\pi}{2n}$$
$$Q = \frac{(k^2+1)\pi^2}{4n^2} \qquad = \frac{(2k^2+2)\pi^2}{2\cdot 4\cdot n^2}$$
$$R = \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} \qquad = \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3}$$
$$S = \frac{(3k^4+4k^2+1)\pi^4}{48n^4} = \frac{(24k^4+32k^3+8)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4}$$
$$T = \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} = \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5}$$

u. s. w.

§ 173.

Setzt man ebenso in der letzten Formel des § 164:

$$\cos\frac{v}{2} + \cot\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$
$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$
$$v = \frac{x}{n}\pi,\quad g = \frac{m}{n}\pi \text{ und } \operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n} = k, \text{ also } \cot\frac{g}{2} = \frac{1}{k},$$

so ergiebt sich:

$$\cos\frac{\pi x}{2n} + \frac{1}{k}\sin\frac{\pi x}{2n}$$
$$= 1 + \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi^2x^2}{2\cdot 4\cdot n^2} - \frac{\pi^3x^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3k} + \frac{\pi^4x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4} + \frac{\pi^5x^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5k} - \cdots$$
$$= \left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{2n-m}\right)\left(1+\frac{x}{2n+m}\right)\left(1-\frac{x}{4n-m}\right)\left(1+\frac{x}{4n+m}\right)\cdots$$

Vergleicht man dies mit der allgemeinen Formel des § 165, so folgt

$$A = \frac{\pi}{2nk},\quad B = -\frac{\pi^2}{2\cdot 4\cdot n^2},\quad C = -\frac{\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3k},\quad D = \frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4},$$
$$E = \frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5k}$$

und ferner:

$$\alpha = \frac{1}{m},\quad \beta = -\frac{1}{2n-m},\quad \gamma = \frac{1}{2n+m},\quad \delta = -\frac{1}{4n-m},\quad \varepsilon = \frac{1}{4n+m}, \text{ u. s. w.}$$

§ 174.

Hieraus kann man nach § 166 folgende Reihen bilden und deren Summen angeben:

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \cdots$$
$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \cdots$$
$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \cdots$$
$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \cdots$$
$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \cdots$$

u. s. w.

Die Summen dieser Reihen aber sind:

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} \qquad = \frac{1\cdot\pi}{2nk}$$
$$Q = \frac{(k^2+1)\pi^2}{4n^2k^2} \qquad = \frac{(2+2k^2)\pi^2}{2\cdot 4\cdot n^2k^2}$$
$$R = \frac{(k^2+1)\pi^3}{8n^3k^3} \qquad = \frac{(6+6k^2)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot n^3k^3}$$
$$S = \frac{(k^4+4k^2+3)\pi^4}{48n^4k^4} \qquad = \frac{(24+32k^2+8k^4)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot n^4k^4}$$
$$T = \frac{(2k^4+5k^2+3)\pi^5}{96n^5k^5} \qquad = \frac{(120+200k^2+80k^4)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot n^5k^5}$$
$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960n^6k^6} = \frac{(720+1440k^2+816k^4+96k^6)\pi^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot n^6k^6}$$

u. s. w.

§ 175.

Es ist der Mühe wert, aus diesen allgemeinen Reihen einige *besondere* Fälle abzuleiten, und zwar erhält man dieselben, wenn man das Verhältnis $\frac{m}{n}$ in Zahlen ausdrückt. *Setzt man also* zunächst $m = 1$ und $n = 2$, so dass $k = \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tang} 45^\circ = 1$ ist, so fallen die beiden Arten von Reihen zusammen, und es wird:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{96}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\cdots$$

$$\frac{\pi^6}{960}=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\cdots$$

u. s. w.

Von diesen Reihen haben wir die erste schon im § 140, von den andern aber diejenigen, in denen die Exponenten gerade Zahlen sind, soeben im § 169 abgeleitet. Diejenigen jedoch, in denen die Exponenten ungerade Zahlen sind, treten hier zum ersten Male auf. Es geht hieraus also hervor, dass man auch die Summen solcher Reihen wie:

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\frac{1}{9^{2n+1}}-\cdots$$

durch den Werth von π auszudrücken vermag.

§ 176.

Ist jetzt $m=1$ und $n=3$, also $k=\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\operatorname{tang} 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$, so gehen die Reihen des § 172 in die folgenden über:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots.$$

$$\frac{\pi^2}{27}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{16^2}+\cdots.$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}}=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{10^3}+\frac{1}{14^3}-\frac{1}{16^3}+\cdots.$$

u. s. w.

oder:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots.$$

$$\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots.$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{8^3}+\cdots.$$

u. s. w.

In diesen Reihen fehlen alle durch 3 teilbaren Zahlen. Man kann diejenigen von ihnen, in denen die Exponenten gerade Zahlen sind, aus den früher gefundenen auf folgende Weise ableiten. Es ist nach § 167:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$$

folglich:

$$\frac{\pi^2}{6\cdot 9}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{15^2}+\cdots.$$

Zieht man nun diese letzte Reihe, welche alle durch 3 teilbaren Zahlen enthält, von der ersten ab, so bleiben alle durch 3 nicht teilbaren Zahlen übrig und es wird somit:

$$\frac{8\pi^2}{54}=\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots,$$

wie vorher.

§ 177.

Macht man dieselbe Substitution $m=1$, $n=3$, $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ in den Formeln des § 174, so erhält man folgende Reihen:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}+\cdots.$$

u. s. w.,

und zwar treten hier alle ungeraden Zahlen mit Ausnahme der durch 3 teilbaren auf. Uebrigens kann man auch hier diejenigen Reihen, in denen gerade Exponenten vorkommen, aus schon bekannten Reihen ableiten. Da nämlich nach § 169

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

ist, so wird:

$$\frac{\pi^2}{8\cdot 9}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{27^2}+\cdots,$$

welche Reihe nur alle ungeraden durch 3 teilbaren Zahlen enthält. Zieht man dieselbe also von der vorhergehenden ab, so bleibt die Reihe aller ungeraden durch 3 nicht teilbaren Zahlen übrig, und es ist wie vorher:

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots.$$

§ 178.

Wenn man die im § 172 und im § 174 gefundenen Reihen zu einander addirt oder von einander subtrahirt, so erhält man andere merkwürdige Reihen. So wird z. B.:

$$\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2nk}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\cdots=\frac{(k^2+1)\pi}{2nk}.$$

Da nun aber:

$$k=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{m\pi}{2n}},$$

folglich

$$1+k^2=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right)} \quad\text{und}\quad \frac{2k}{1+k^2}=2\sin\frac{m\pi}{2n}\cos\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{m\pi}{n}$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Wert oben einsetzt:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\cdots$$

Analog findet man:

$$\frac{\pi}{2nk}-\frac{k\pi}{2n}=\frac{(1-k^2)\pi}{2nk}$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-\cdots$$

Da aber:

$$\frac{2k}{1-k^2}=\operatorname{tang}2\frac{m\pi}{2n}=\operatorname{tang}\frac{m\pi}{n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}}$$

ist, so wird:

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\cdots$$

Die hieraus sich ergebenden Reihen der Quadrate und der höheren Potenzen kann man indessen leichter durch Differentiation aus diesen beiden Reihen ableiten.

§ 179.

Da wir im Vorigen die Fälle, wo $m=1$ und $n=2$ oder $=3$ ist, bereits betrachtet haben, so wollen wir jetzt $m=1$ und $n=4$ setzen. Dann ist:

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\text{und}\quad \cos\frac{m\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mithin:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

und

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

Ist ferner $m=1$ und $n=8$, so ist:

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{\pi}{8} \quad\text{und}\quad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}},\quad \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2},$$

folglich:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}-\cdots$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}-1)}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots$$

Setzt man endlich $m=3$ und $n=8$, so wird:

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{3\pi}{8},\quad\text{folglich}\quad \sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}},\quad \cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

$$\frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{3\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Es ergeben sich somit die Reihen:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\cdots$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\cdots$$

§ 180.

Combinirt man diese Reihen mit einander, so ergeben sich die folgenden:

$$\frac{\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1)}{8}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1)}{8}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1+\sqrt{4-2\sqrt{2}})}{8}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1-\sqrt{4-2\sqrt{2}})}{8}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\cdots$$

Auf ähnliche Weise kann man, indem man $n=16$ und $m=1$, 3, 5 oder 7 annimmt, noch weiter fortgehen und so die Summen der aus den Brüchen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}\cdots$ gebildeten Reihen finden, in denen die Vorzeichen + und — nach noch anderen Gesetzen mit einander abwechseln.

§ 181.

Wenn man in den Reihen des § 178 je zwei Glieder zu einem zusammenfasst, so erhält man aus der ersten:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}+\cdots$$

und daher:

$$\frac{1}{n^2-m^2}-\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}-\cdots=\frac{\pi}{2mn\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{1}{2m^2}.$$

Die andere Reihe hingegen giebt:

$$\frac{\pi}{n\,\mathrm{tang}\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\cdots$$

oder:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\cdots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn\,\mathrm{tang}\frac{m\pi}{n}}$$

Durch Addition dieser beiden Reihen entsteht sodann die folgende:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots=\frac{\pi\,\mathrm{tang}\frac{m\pi}{2n}}{4mn}.$$

Lässt man in dieser Reihe $n=1$ und m irgend eine gerade Zahl, also $m=2k$ sein, so wird wegen $\mathrm{tang}\,k\pi=0$ immer, den Fall $k=0$ allein ausgenommen, die Gleichung stattfinden:

$$\frac{1}{1-4k^2}+\frac{1}{9-4k^2}+\frac{1}{25-4k^2}+\frac{1}{49-4k^2}+\cdots=0.$$

Ist dagegen $n=2$ und m irgend eine ungerade Zahl $2k+1$, so folgt wegen $\frac{1}{\mathrm{tang}\frac{m\pi}{n}}=0$ aus der zweiten Reihe:

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2}+\frac{1}{16-(2k+1)^2}+\frac{1}{36-(2k+1)^2}+\cdots=\frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

§ 182.

Multiplicirt man die gefundenen Reihen mit n^2 und setzt dann $\frac{m}{n}=p$, so erhalten sie die Form:

$$\frac{1}{1-p^2}-\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}-\frac{1}{16-p^2}+\cdots=\frac{\pi}{2p\sin p\pi}-\frac{1}{2p^2}$$

$$\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}+\frac{1}{16-p^2}+\cdots=\frac{1}{2p^2}-\frac{\pi}{2p\,\mathrm{tang}\,p\pi},$$

und setzt man hierin $p^2=a$, so entstehen daraus die Reihen:

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}-\frac{1}{16-a}+\cdots=\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\sin\pi\sqrt{a}}-\frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}+\frac{1}{16-a}+\cdots=\frac{1}{2a}-\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\,\mathrm{tang}\,\pi\sqrt{a}}.$$

Wofern also nur a keine negative Zahl oder eine ganze Quadratzahl ist, kann die Summe dieser Reihe durch den Kreis ausgedrückt werden.

§ 183.

Da wir oben gezeigt haben, dass sich die imaginären Exponentialgrössen auf den Sinus und Cosinus von Kreisbogen zurückführen lassen, so sind wir auch im Stande, die Summen dieser Reihen in dem Falle anzugeben, wo a eine negative Zahl ist. Denn da

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x$$

ist, so wird umgekehrt, wenn $y\sqrt{-1}$ für x gesetzt wird:

$$\cos y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

$$\sin y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}}\cdot$$

Wenn daher $a=-b$ und $y=\pi\sqrt{b}$ ist, so ist:

$$\cos\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}}{2}$$

$$\sin\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}$$

und:

$$\operatorname{tang}\pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{\left(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}\right)\sqrt{-1}}\cdot$$

Folglich ist:

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\sin\pi\sqrt{-b}} = \frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$$

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\operatorname{tang}\pi\sqrt{-b}} = \frac{-\pi\sqrt{b}\left(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}\right)}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}\cdot$$

Dies vorausgeschickt, wird jetzt:

$$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\cdots = \frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{\left(e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}\right)b}$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\cdots = \frac{\left(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}\right)\pi\sqrt{b}}{2\left(e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}\right)}-\frac{1}{2b}$$

Eben diese Reihen hätten auch auf dem in diesem Capitel eingeschlagenen Wege aus § 162 abgeleitet werden können. Da man jedoch auf diese Weise ein *Beispiel für die Zurückführung der Sinus und Cosinus imaginärer Kreisbogen auf reelle Exponentialgrössen* erhielt, so glaubte ich diese Art der Entwicklung der andern vorziehen zu müssen.

11. Capitel.

Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

§ 184.

Da wir im § 158 gesehen haben, dass wenn z irgend einen Kreisbogen bedeutet:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

und

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\cdots$$

ist, so ist auch, wenn wir den Bogen $z=\frac{m\pi}{n}$ setzen:

$$\sin\frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\cdots$$

oder, wenn wir $2n$ statt n schreiben:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\right)\left(\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\right)\left(\frac{36n^2-m^2}{36n^2}\right)\left(\frac{64n^2-m^2}{64n^2}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\right)\left(\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\right)\left(\frac{49n^2-m^2}{49n^2}\right)\cdots$$

Zerlegt man nun jeden dieser Factoren in einfache Factoren, so wird:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\cdots$$

Setzt man endlich $n-m$ statt m, so erhält man, da

$$\sin\frac{(n-m)\pi}{2n}=\cos\frac{m\pi}{2n} \text{ und } \cos\frac{(n-m)\pi}{2n}=\sin\frac{m\pi}{2n}$$

ist, die folgenden Ausdrücke:

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\cdots$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\cdots$$

§ 185.

Da wir nun sowohl für den Sinus als für den Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ zwei Ausdrücke haben, so erhält man, wenn man sie durch einander dividirt:

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots,$$

folglich:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\ldots},$$

welchen Wert Wallis in seiner *Arithmetica infinitorum* für den Kreisumfang gegeben hat. Aus dem ersten Ausdrucke für den Sinus kann man aber noch unzählig viele andere ähnliche Ausdrücke ableiten; denn man findet daraus:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right)\cdots$$

und dieser Ausdruck giebt für $\frac{m}{n}=1$ die Wallis'sche Formel für π. Ist aber $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, so wird, weil $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdots,$$

und lässt man $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$ sein, so folgt wegen $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdots$$

Dividirt man den Wallis'schen Ausdruck durch den, für welchen $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ ist, so ergiebt sich:

$$\sqrt{2}=\frac{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\cdot14\cdot18\cdot18\ldots}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\ldots}.$$

§ 186.

Da die Tangente eines jeden Winkels gleich dem Quotienten aus seinem Sinus und Cosinus ist, so kann man auch die Tangente durch ein solches Product von unendlich vielen Factoren darstellen. Wenn nämlich der erste Ausdruck für den Sinus durch den zweiten für den Cosinus dividirt wird, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\cdots$$

Ebenso findet man für die Sekanten und Cosekanten:

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\cdots$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\cdots$$

Wenn man aber die beiden andern Formeln für den Sinus und Cosinus nimmt, so wird:

$$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdots$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\cdots$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdots$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots$$

§ 187.

Wenn man k für m schreibt, so findet man für den Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{k\pi}{2n}$ ähnliche Ausdrücke wie vorher, und wenn man durch diese jene früheren dividirt, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-m}{3n+k}\cdot\frac{4n+m}{5n-k}\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{k}\cdot\frac{n+m}{2n-k}\cdot\frac{3n-m}{2n+k}\cdot\frac{3n+m}{4n-k}\cdot\frac{5n-m}{4n+k}\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{n-k}\cdot\frac{n+m}{n+k}\cdot\frac{3n-m}{3n-k}\cdot\frac{3n+m}{3n+k}\cdot\frac{5n-m}{5n-k}\cdots$$

Nimmt man daher für $\frac{k\pi}{2n}$ einen Winkel an, dessen Sinus und Cosinus gegeben sind, so kann man aus diesen den Sinus und Cosinus irgend eines andern Winkels mittelst der angeführten Formeln bestimmen.

§ 188.

Umgekehrt kann man nun auch die wahren Werte solcher Producte von unendlich vielen Factoren entweder mittelst des Kreisumfanges oder mittelst des Sinus und Cosinus gegebener Winkel angeben, und zwar ist dies an und für sich von nicht geringer Bedeutung, weil man bis jetzt noch keine Hülfsmittel weiter kennt, die Werte solcher unendlichen Producte zu bestimmen. Im Uebrigen aber gewähren diese Ausdrücke wenig Nutzen, wenn es gilt, die Werte von π oder des Sinus und Cosinus eines Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ näherungsweise zu berechnen. Denn wenn auch die Multiplikation der in Decimalbrüchen dargestellten Factoren des Products $\frac{\pi}{2} = 2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$ ohne jede Schwierigkeit ausgeführt werden kann, so müsste man doch eine sehr grosse Menge von Gliedern berechnen, wenn man auch nur auf zehn Stellen den Wert von π richtig finden wollte.

§ 189.

Dagegen gewähren derartige Ausdrücke, ob sie gleich ins Unendliche fortgehen, bei der **Berechnung der Logarithmen** ausserordentlichen Nutzen; ja es würde ohne dieselben diese Berechnung mit den grössten Schwierigkeiten verbunden sein. Zunächst nämlich erhält man, da

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$$

ist, wenn man beiderseits die Logarithmen nimmt:

$$\log\pi = \log 4 + \log\left(1-\frac{1}{9}\right) + \log\left(1-\frac{1}{25}\right) + \log\left(1-\frac{1}{49}\right) + \cdots$$

oder auch:

$$\log\pi = \log 2 - \log\left(1-\frac{1}{4}\right) - \log\left(1-\frac{1}{16}\right) - \log\left(1-\frac{1}{36}\right) - \cdots,$$

und zwar ist es hierbei gleichgiltig, ob man die gemeinen oder die hyperbolischen Logarithmen anwendet. Da man indessen die gemeinen Logarithmen auf leichte Weise aus den hyperbolischen erhalten kann, so wird man sich am besten des erwähnten vortrefflichen Hülfsmittels bei der Bestimmung des hyperbolischen Logarithmus von π bedienen.

§ 190.

Da nun bei Anwendung der **hyperbolischen** Logarithmen:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

ist, so erhält man, wenn man die einzelnen Glieder nach dieser Formel entwickelt:

$$\begin{aligned}\log\pi = \log 4 &- \frac{1}{9} - \frac{1}{2\cdot 9^2} - \frac{1}{3\cdot 9^3} - \frac{1}{4\cdot 9^4} - \cdots\\ &- \frac{1}{25} - \frac{1}{2\cdot 25^2} - \frac{1}{3\cdot 25^3} - \frac{1}{4\cdot 25^4} - \cdots\\ &- \frac{1}{49} - \frac{1}{2\cdot 49^2} - \frac{1}{3\cdot 49^3} - \frac{1}{4\cdot 49^4} - \cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Wenn man in diesen unendlich vielen Reihen die vertikal unter einander stehenden Glieder zusammennimmt, so erhält man Reihen, deren Summen wir schon oben gefunden haben. Setzen wir also der Kürze wegen

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \cdots$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \cdots$$

u. s. w.,

so ergiebt sich:

$$\log\pi = \log 4 - (A-1) - \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{3}(C-1) - \frac{1}{4}(D-1) - \cdots.$$

Es ist aber, wenn man die oben § 169 gefundenen Summen näherungsweise berechnet:

$$\begin{aligned}
A &= 1{,}2337005501361698273543 1\\
B &= 1{,}0146780316041920545462 5\\
C &= 1{,}0014470766409421219064 7\\
D &= 1{,}0001551790252961193029 8\\
E &= 1{,}0000170413630448255081 6\\
F &= 1{,}0000018858485831195759 0\\
G &= 1{,}0000002092405192115001 0\\
H &= 1{,}0000000232371573791567 0\\
J &= 1{,}0000000025814375566597 7\\
K &= 1{,}0000000002868076974555 8\\
L &= 1{,}0000000000318667751404 4\\
M &= 1{,}0000000000035407229439 2\\
N &= 1{,}0000000000003934124669 1\\
O &= 1{,}0000000000000437124485 9\\
P &= 1{,}0000000000000048569368 2\\
Q &= 1{,}0000000000000005396595 7\\
R &= 1{,}0000000000000000599621 7\\
S &= 1{,}0000000000000000066624 6\\
T &= 1{,}0000000000000000007402 7\\
V &= 1{,}0000000000000000000822 5\\
W &= 1{,}0000000000000000000091 3\\
X &= 1{,}0000000000000000000010 1.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man ohne schwierige Rechnung den **hyperbolischen Logarithmus** von π, nämlich:

$$\log \pi = 1{,}14472988584940017414342\ldots,$$

und multiplicirt man diesen mit 0,43429 ..., so wird der **gemeine Logarithmus** von π:

$$\log \pi = 0{,}49714987269413385435126828829089887\ldots$$

§ 191.

Da wir ferner sowohl für den Sinus wie für den Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ einen aus unendlich vielen Factoren bestehenden Ausdruck gefunden haben, so können wir auch den **Logarithmus der beiden trigonometrischen Functionen in bequemer Weise** darstellen. Es ergiebt sich nämlich aus den zuerst (§ 184) gefundenen Formeln:

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\pi + \log\frac{m}{2n} + \log\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right) + \cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right) + \cdots$$

Hieraus lassen sich zunächst die hyperbolischen Logarithmen ebenso wie vorher durch sehr stark convergirende Reihen bestimmen. Um aber nicht mehr unendliche Reihen, als nötig sind, anzuwenden, wollen wir die Logarithmen der ersten Glieder nicht in dergleichen Reihen entwickeln. Alsdann ist:

$$\begin{aligned}
\log\sin\frac{m\pi}{2n} = {}& \log\pi + \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - \log 8 - 3\log n\\
& -\frac{m^2}{16n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 16^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 16^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 16^4 n^8} - \cdots\\
& -\frac{m^2}{36n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 36^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 36^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 36^4 n^8} - \cdots\\
& -\frac{m^2}{64n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 64^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 64^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 64^4 n^8} - \cdots\\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\frac{m\pi}{2n} = {}& \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n\\
& -\frac{m^2}{9n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 9^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 9^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 9^4 n^8} - \cdots\\
& -\frac{m^2}{25n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 25^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 25^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 25^4 n^8} - \cdots\\
& -\frac{m^2}{49n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 49^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 49^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 49^4 n^8} - \cdots\\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

§ 192.

Es kommen also in diesen Reihen nur die **geraden** Potenzen von $\frac{m}{n}$ vor, und diese sind multiplicirt mit Reihen, deren Summen wir schon oben bestimmt haben. Es wird nämlich:

$$\begin{aligned}
\log\sin\frac{m\pi}{2n} = {}& \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - 3\log n + \log\pi - \log 8\\
& -\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots\right)\\
& -\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\cdots\right)\\
& -\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^6}+\cdots\right)\\
& -\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{12^8}+\cdots\right)\\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n}=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\cdots\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Summen dieser letzteren Reihen haben wir soeben im § 190 angegeben; die ersteren könnten zwar aus den letzten abgeleitet werden, doch wollen wir ihre Werte, um sie beim Gebrauche leichter zur Hand zu haben, ebenfalls hierher setzen.

§ 193.

Setzt man also der Kürze wegen:

$$\alpha=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$
$$\beta=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots$$
$$\gamma=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\cdots$$
$$\delta=\frac{1}{2^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\cdots$$

u. s. w.,

so sind die angenäherten Werte dieser Reihen:

$$\alpha=0{,}41123351671205660911810$$
$$\beta=0{,}06764520210694613696975$$
$$\gamma=0{,}01589598534350701780804$$
$$\delta=0{,}00392217717264822007570$$
$$\varepsilon=0{,}00097753376477325984898$$
$$\zeta=0{,}00024420070472492872274$$
$$\eta=0{,}00006103889453949332915$$
$$\vartheta=0{,}00001525902225127269977$$
$$\iota=0{,}00000381471182744318008$$
$$\varkappa=0{,}00000095367522617534053$$
$$\lambda=0{,}00000023841863595259154$$
$$\mu=0{,}00000005960464832831555$$
$$\nu=0{,}00000001490116141589813$$

$$\xi=0{,}00000000372529031233986$$
$$o=0{,}00000000093132257548284$$
$$\pi=0{,}00000000023283064370807$$
$$\rho=0{,}00000000005820766091685$$
$$\sigma=0{,}00000000001455191522858$$
$$\tau=0{,}00000000000363797880710$$
$$\upsilon=0{,}00000000000090949470177$$
$$\varphi=0{,}00000000000022737367544$$
$$\chi=0{,}00000000000005684341886$$
$$\psi=0{,}00000000000001421085471$$
$$\omega=0{,}00000000000000355271367.$$

Die übrigen Summen erhält man, wenn man die jedesmal vorhergehende durch 4 dividirt.

§ 194.

Nimmt man nun dies zu Hülfe, so ist:

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n}=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n+\log\pi-\log 8$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^4}{2n^4}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^6}{n^6}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n}=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}(A-1)-\frac{m^4}{2n^4}(B-1)-\frac{m^6}{3n^6}(C-1)-\cdots.$$

Da nun die Logarithmen von π und 8 bekannt sind, so ist der hyperbolische Logarithmus des Sinus des Winkels $\frac{m}{n}90°$:

$$\log\sin\frac{m}{n}90°=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n$$
$$-\ 0{,}93471165583043575410$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}16123351671205660911$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}00257260105347306848$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}00009032844783567260$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00000398179316205501$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000019425295465196$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000001001328748812$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000000053404135618$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000000002914859658$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000000000161797979$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000000000009097690$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000000000000516827$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000000000000029607$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000000000000001708$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000000000000000099$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000000000000000005.$$

Dagegen ist der hyperbolische Logarithmus des Cosinus des Winkels $\frac{m}{n}\,90°$

$$\log\cos\frac{m}{n}\,90° = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0{,}23370055013616982735$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0{,}00733901580209602727$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0{,}00048235888031404063$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0{,}00003879475632402982$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000340827260896510$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000031430809718659$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000002989150274450$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000000290464467239$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000000028682639518$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000000002868076974$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000000000289697956$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000000000029506024$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000000000003026249$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000000000000312232$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000000000000032379$$
$$-\frac{m^{32}}{n^{32}}\cdot 0{,}00000000000000003373$$
$$-\frac{m^{34}}{n^{34}}\cdot 0{,}00000000000000000352$$
$$-\frac{m^{36}}{n^{36}}\cdot 0{,}00000000000000000037$$
$$-\frac{m^{38}}{n^{38}}\cdot 0{,}00000000000000000004.$$

§ 195.

Wenn man die hyperbolischen Logarithmen der Sinus und Cosinus mit 0,4342944819... multiplicirt, so erhält man die gemeinen Logarithmen derselben für den Radius 1. Da man jedoch in den Tafeln den Logarithmus des Sinus des rechten Winkels gewöhnlich gleich 10 setzt, so muss man, um die Logarithmen der Sinus und Cosinus, so wie sie in den Tafeln stehen, zu erhalten, nach der gedachten Multiplikation noch 10 dazu addiren. Es wird daher der in den Tafeln befindliche:

$$\log\sin\frac{m}{n}\,90° = \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - 3\log n$$
$$+\quad 9{,}594059885702190$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0{,}070022826605901$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0{,}001117266441661$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0{,}000039229146453$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0{,}000001729270798$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}000000084362986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}000000004348715$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}000000000231931$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}000000000012659$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}000000000000702$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}000000000000039$$

und der in den Tafeln befindliche Logarithmus des Cosinus von $\frac{m}{n}90°$ ist

$$\log\cos\frac{m}{n}90° = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$
$$+\quad 10{,}000000000000000$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0{,}101494859341892$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0{,}003187294065451$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0{,}000209485800017$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0{,}000016848348597$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}000000000000013.$$

§ 196.

Mittelst dieser Formeln kann man also sowohl die hyperbolischen wie die gemeinen Logarithmen der Sinus und Cosinus aller Winkel finden, ohne dass man die Sinus und Cosinus selbst zu kennen braucht. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus findet man aber weiter die der Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten bloss allein durch Subtraction, so dass für diese besondere Formeln nicht erforderlich sind. Man muss indessen wohl beachten, dass man von den Zahlen $m, n, n-m, n+m$ u. s. w. die hyperbolischen Logarithmen nehmen muss, falls man die hyperbolischen Logarithmen der Sinus und Cosinus sucht, die gemeinen aber, wenn diese mit Hülfe der vorhergehenden Formeln gefunden werden sollen. Da überdies der Bruch $\frac{m}{n}$ das Verhältnis bezeichnet, in welchem der gegebene Winkel zum rechten Winkel steht, und da ferner die Sinus der Winkel, welche grösser als ein halber Rechter sind, den Cosinus der Winkel, die kleiner sind als 45°, gleich sind, so braucht der Bruch $\frac{m}{n}$ niemals grösser als $\frac{1}{2}$ angenommen zu werden, und es convergiren daher die angeführten Glieder noch um vieles stärker, so dass man meistens mit der Hälfte derselben auskommt.

§ 197.

Bevor wir jedoch diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch zeigen, wie man die Tangenten und Sekanten auf eine bequemere Weise finden kann, als es im vorigen Capitel geschehen ist. Obwohl man nämlich die Tangenten und Sekanten aus den Sinus und Cosinus erhalten kann, so ist dazu doch immer eine Division erforderlich, und diese ist bei so viel Stellen überaus beschwerlich. Zwar haben wir die Formeln für die Tangenten und Cotangenten bereits oben im § 135 angegeben, indessen waren wir da noch nicht im Stande, dieselben näher zu begründen. Dies haben wir dem gegenwärtigen Capitel vorbehalten.

§ 198a.*)

Zunächst leiten wir also aus § 181 einen Ausdruck für die Tangente des Winkels $\frac{m}{2n}\pi$ her. Da nämlich:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots=\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi$$

ist, so wird:

$$\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi=\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots\right).$$

*) Im Originale finden sich zwei mit der Zahl 198 versehene Paragraphen. Dieselben sind daher hier mit 198a und 198b bezeichnet. Anm. d. Uebers.

Ferner ist:

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\cdots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\cot\frac{m}{n}\pi,$$

oder, wenn wir $2n$ für n schreiben:

$$\cot\frac{m}{2n}\pi=\frac{2n}{m\pi}-\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\frac{1}{36n^2-m^2}+\cdots\right).$$

Entwickelt man hierin die einzelnen Brüche, die ersten, welche leicht berechnet werden können, ausgenommen, in unendliche Reihen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi=&\frac{mn}{n^2-m^2}\frac{4}{\pi}\\&+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{3^2n}+\frac{m^3}{3^4n^3}+\frac{m^5}{3^6n^5}+\cdots\right)\\&+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{5^2n}+\frac{m^3}{5^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{5^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{7^2n}+\frac{m^3}{7^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{7^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot\frac{m}{2n}\pi=&\frac{n}{m}\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\frac{4}{\pi}\\&-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{4^2n}+\frac{m^3}{4^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{4^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{6^2n}+\frac{m^3}{6^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{6^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{8^2n}+\frac{m^3}{8^4\cdot n^3}+\frac{m^5}{8^6\cdot n^5}+\cdots\right)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

§ 198b.

Aus dem bekannten Werte von π aber findet man:

$$\frac{1}{\pi}=0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77679\ 26745\ 02872\ 4,$$

und ausserdem treten hier eben dieselben Reihen auf, die wir oben (§ 190 und § 193) mit den Buchstaben $A, B, C, D\ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ bezeichnet haben.

Es ist daher:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang}\frac{m}{2n}\pi\\&=\frac{mn}{n^2-m^2}\frac{4}{\pi}+\frac{m}{n}\frac{4}{\pi}(A-1)+\frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi}(B-1)+\frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi}(C-1)+\frac{m^7}{n^7}\frac{4}{\pi}(D-1)+\cdots\end{aligned}$$

und ebenso für die Cotangente:

$$\begin{aligned}&\cot\frac{m}{2n}\pi\\&=\frac{n}{m}\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\frac{4}{\pi}-\frac{m}{n}\frac{4}{\pi}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)\\&\qquad-\frac{m^7}{n^7}\frac{4}{\pi}\left(\delta-\frac{1}{2^8}\right)-\cdots\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln nun sind die Ausdrücke entstanden, die wir oben im § 135 für die Tangente und Cotangente gegeben haben; ferner haben wir im § 137 gezeigt, wie man aus den Tangenten und Cotangenten allein durch Addition und Subtraction die Sekanten und Cosekanten finden kann. Vermittelst dieser Formeln hätten daher die Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten und ihrer Logarithmen weit leichter berechnet werden können, als es von den ersten Verfertigern derselben geschehen ist.

12. Capitel.

Von der Entwicklung der gebrochenen Functionen in reeller Form.

—×—

§ 199.

Wir haben bereits oben im zweiten Capitel gezeigt, wie man jede gebrochene Function in soviel Teile zerlegen kann, als der Nenner derselben einfache Factoren enthält. Diese letzteren nämlich liefern die Nenner der Partialbrüche. Besitzt nun der Nenner einfache imaginäre Factoren, so werden offenbar auch die daraus entspringenden Partialbrüche imaginär sein, und es wird daher in diesem Falle wenig Zweck haben, einen reellen Bruch in imaginäre zu zerlegen. Da wir indessen auch gezeigt haben, dass sich jede ganze Function, wie es ja der Nenner eines Bruches ist, mag sie auch noch so viele einfache imaginäre Factoren besitzen, doch immer in zweifache reelle Factoren zerlegen lässt, so können wir bei der Zerlegung der Brüche die imaginären Grössen dadurch vermeiden, dass man als **Nenner der Partialbrüche** nicht die einfachen, sondern die **reellen zweifachen Factoren des Hauptnenners** gebraucht.

§ 200.

Ist daher die gebrochene Function $\frac{M}{N}$ gegeben, so suche man daraus nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren alle die einfachen Brüche, welche den einfachen reellen Factoren des Nenners N entsprechen. Anstatt der imaginären Factoren nehme man aber den Ausdruck $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ als Factor von N an. Da man jedoch bei dieser Untersuchung den Zähler und Nenner in entwickelter Form betrachten muss, so wollen wir den gegebenen Bruch in der Gestalt:

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots)}$$

voraussetzen und annehmen, dass der aus dem Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ des Nenners entstehende Partialbruch der folgende sei:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}.$$

Hier kann nämlich der Zähler, da die höchste im Nenner vorkommende Potenz von z die zweite ist, die Veränderliche z nur in der ersten, nicht aber in einer höheren Potenz enthalten, weil sonst der Bruch eine ganze Function einschliessen würde, welche abgesondert werden müsste.

§ 201.

Setzt man der Kürze wegen den Zähler:

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots = M,$$

den andern Factor des Nenners

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots = Z,$$

und nimmt man an, dass der aus diesem zweiten Factor Z entstehende Partialbruch gleich $\frac{Y}{Z}$ sei, so wird:

$$Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}.$$

Dieser Ausdruck muss eine ganze Function und somit $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ notwendig durch $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ teilbar sein; es muss daher der Ausdruck $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ verschwinden, wenn man $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2 = 0$, d. h. also entweder $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ oder $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ setzt. Macht man noch $\frac{p}{q} = f$, so wird $z^n = f^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$, und wenn man diese beiden Werte von z substituirt, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen man die beiden Unbekannten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ bestimmen kann.

§ 202.

Führt man die angegebene Substitution wirklich aus, so ergiebt die Entwicklung der Gleichung $M = \mathfrak{A}Z + \mathfrak{a}Zz$ die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &A + Bf\cos\varphi + Cf^2\cos 2\varphi + Df^3\cos 3\varphi + \cdots \\ &\pm (Bf\sin\varphi + Cf^2\sin 2\varphi + Df^3\sin 3\varphi + \cdots)\sqrt{-1} \end{aligned}\right\}$$
$$= \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A}(\alpha + \beta f\cos\varphi + \gamma f^2\cos 2\varphi + \delta f^3\cos 3\varphi + \cdots) \\ &\pm \mathfrak{A}(\beta f\sin\varphi + \gamma f^2\sin 2\varphi + \delta f^3\sin 3\varphi + \cdots)\sqrt{-1} \\ &+ \mathfrak{a}(\alpha f\cos\varphi + \beta f^2\cos 2\varphi + \gamma f^3\cos 3\varphi + \cdots) \\ &\pm \mathfrak{a}(\alpha f\sin\varphi + \beta f^2\sin 2\varphi + \gamma f^3\sin 3\varphi + \cdots)\sqrt{-1}, \end{aligned}\right.$$

und hieraus entsteht, wenn man der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
A + Bf\cos\varphi + Cf^2\cos 2\varphi + Df^3\cos 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{P}\\
Bf\sin\varphi + Cf^2\sin 2\varphi + Df^3\sin 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{p}\\
\alpha + \beta f\cos\varphi + \gamma f^2\cos 2\varphi + \delta f^3\cos 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{Q}\\
\beta f\sin\varphi + \gamma f^2\sin 2\varphi + \delta f^3\sin 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{q}\\
\alpha f\cos\varphi + \beta f^2\cos 2\varphi + \gamma f^3\cos 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{R}\\
\alpha f\sin\varphi + \beta f^2\sin 2\varphi + \gamma f^3\sin 3\varphi + \cdots &= \mathfrak{r}
\end{aligned}$$

setzt:

$$\mathfrak{P} \pm \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + \mathfrak{a}\mathfrak{R} \pm \mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}.$$

§ 203.

Wegen der doppelten Vorzeichen erhält man hieraus die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} &= \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{a}\mathfrak{R}\\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{A}\mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{r},\end{aligned}$$

aus denen sich die beiden Unbekannten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ wie folgt bestimmen:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}}.$$

Wenn also der Bruch:

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)\,Z}$$

gegeben ist, so findet man den daraus entstehenden Partialbruch:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}\,z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$$

nach folgender Regel:

Man setze $f = \frac{p}{q}$ und mache für jeden Werth von n

erstens in M die Substitution $z^n = f^n\cos n\varphi$; dadurch wird $M = \mathfrak{P}$;
zweitens in M die Substitution $z^n = f^n\sin n\varphi$; dadurch wird $M = \mathfrak{p}$;
drittens in Z die Substitution $z^n = f^n\cos n\varphi$; dadurch wird $Z = \mathfrak{Q}$;
viertens in Z die Substitution $z^n = f^n\sin n\varphi$; dadurch wird $Z = \mathfrak{q}$;
fünftens in zZ die Substitution $z^n = f^n\cos n\varphi$; dadurch wird $zZ = \mathfrak{R}$;
sechstens in zZ die Substitution $z^n = f^n\sin n\varphi$; dadurch wird $zZ = \mathfrak{r}$.

Hat man auf diese Weise die Werte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ gefunden, so bestimmen sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}} \qquad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}.$$

Erstes Beispiel.

Ist die gebrochene Function gegeben:

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z^4)},$$

und soll für diese der aus dem Factor $1 - z + z^2$ des Nenners entspringende Partialbruch, welcher

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{1 - z + z^2}$$

sein möge, gefunden werden, so erhält man durch Vergleichung dieses Factors mit der allgemeinen Form $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$:

$$p = 1;\ q = 1;\ \cos\varphi = \frac{1}{2},\ \text{also}\ \varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Da nun $M = z^2$, $Z = 1 + z^4$ und $f = 1$ ist, so wird:

$$\mathfrak{P} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \qquad \mathfrak{p} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}; \qquad \mathfrak{q} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{R} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = 1; \qquad \mathfrak{r} = 0.$$

Hieraus findet man: $\mathfrak{A} = -1$, $\mathfrak{a} = 0$, und es ist somit der gesuchte Bruch:

$$\frac{-1}{1 - z + z^2}.$$

Derjenige Bruch aber, welcher diesen zur gegebenen Function ergänzt, ist:

$$\frac{1 + z + z^2}{1 + z^4},$$

und da dessen Nenner $1 + z^4$ die beiden Factoren $1 + z\sqrt{2} + z^2$ und $1 - z\sqrt{2} + z^2$ hat, so kann man eine derartige Zerlegung von Neuem ausführen, und zwar wird dabei im ersten Falle $f = -1$, im zweiten $f = +1$ während für beide Fälle $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist.

Zweites Beispiel.

Soll also der gegebene Bruch:

$$\frac{1 + z + z^2}{(1 + z\sqrt{2} + z^2)(1 - z\sqrt{2} + z^2)}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so ist $M = 1 + z + z^2$, und für den ersten Factor wird:

$$f = -1,\quad \varphi = \frac{\pi}{4},\quad Z = 1 - z\sqrt{2} + z^2.$$

Folglich:

$$\mathfrak{P} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{p} = \quad - \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{q} = \quad + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{R} = \quad - \cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\mathfrak{r} = \quad - \sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2}.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = -4\sqrt{2}$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},\quad \mathfrak{a} = 0.$$

Es ist daher der aus dem Factor $1 + z\sqrt{2} + z^2$ entspringende Partialbruch:

$$\frac{(\sqrt{2}-1) : 2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2}.$$

Der andere Factor aber ergiebt ebenso den Partialbruch:

$$\frac{(\sqrt{2}+1) : 2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}.$$

Man erhält somit für die anfänglich gegebene Function (Beispiel 1) die folgende Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z^4)} = \frac{-1}{1 - z + z^2} + \frac{(\sqrt{2}-1) : 2\sqrt{2}}{1 + z\sqrt{2} + z^2} + \frac{(\sqrt{2}+1) : 2\sqrt{2}}{1 - z\sqrt{2} + z^2}$$

Drittes Beispiel.

Es sei der Bruch

$$\frac{1 + 2z + z^2}{(1 - \frac{8}{5}z + z^2)(1 + 2z + 3z^2)}$$

gegeben. Setzt man hier den Bruch, der aus dem Factor $1 - \frac{8}{5}z + z^2$ entspringt, gleich

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{1 - \frac{8}{5}z + z^2},$$

so wird:

$$p = 1,\quad q = 1,\quad \cos\varphi = \frac{4}{5},\quad f = 1.$$

und ferner:

$$M = 1 + 2z + z^2 \quad\text{und}\quad Z = 1 + 2z + 3z^2.$$

Da aber hier das Verhältnis, in welchem der Winkel φ zu einem Rechten steht, nicht bekannt ist, so muss man die Sinus und Cosinus seiner Vielfachen besonders suchen. Da nun:

$$\cos\varphi = \frac{4}{5} \text{ ist, so wird } \sin\varphi = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{7}{25} \qquad \sin 2\varphi = \frac{24}{25},$$

$$\cos 3\varphi = -\frac{44}{125} \qquad \sin 3\varphi = \frac{117}{125}$$

und somit:

$$\mathfrak{P} = 1 + 2\cdot\frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$$

$$\mathfrak{p} = \quad 2\cdot\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + 2\cdot\frac{4}{5} + 3\cdot\frac{7}{25} = \frac{86}{25}$$

$$\mathfrak{q} = \quad 2\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{24}{25} = \frac{102}{25}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{4}{5} + 2\cdot\frac{7}{25} - 3\cdot\frac{44}{125} = \frac{38}{125}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{3}{5} + 2\cdot\frac{24}{25} + 3\cdot\frac{117}{125} = \frac{666}{125},$$

folglich:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = \frac{53400}{25\cdot 125} = \frac{2136}{125},$$

also:

$$\mathfrak{A}=\frac{1836}{2136}=\frac{153}{178},\quad \mathfrak{a}=-\frac{540}{2136}=-\frac{45}{178}.$$

Es ist daher der aus dem Factor $1-\frac{8}{5}z+z^2$ entstehende Bruch gleich:

$$\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}.$$

Sucht man ebenso den dem andern Factor entsprechenden Bruch, so ist:

$$p=1,\ q=-\sqrt{3},\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

folglich:

$$f=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ M=1+2z+z^2,\ Z=1-\frac{8}{5}z+z^2.$$

Ferner ist:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \text{also } \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\varphi=-\frac{1}{3},\quad \text{also } \sin 2\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos 3\varphi=-\frac{5}{3\sqrt{3}},\quad \text{also } \sin 3\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

Demnach:

$$\mathfrak{P}=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

$$\mathfrak{p}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\mathfrak{Q}=1+\frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{45}$$

$$\mathfrak{q}=\frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$\mathfrak{R}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{8}{5\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{135}$$

$$\mathfrak{r}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{8}{5\cdot 3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{3}}=-\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

Hieraus erhält man:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=-\frac{712\sqrt{2}}{675},$$

und daher:

$$\mathfrak{A}=\frac{100}{712}=\frac{25}{178},\quad \mathfrak{a}=\frac{540}{712}=\frac{135}{178}.$$

Es lässt sich somit der gegebene Bruch folgendermassen in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)}=\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}+\frac{5(5+27z):178}{1+2z+3z^2},$$

§ 204.

Man kann aber auch die Werte der Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ aus den Werten von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ finden. Da nämlich:

$$\mathfrak{Q}=\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos 2\varphi+\delta f^3\cos 3\varphi+\ldots$$

$$\mathfrak{q}=\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin 2\varphi+\delta f^3\sin 3\varphi+\ldots$$

ist, so wird:

$$\mathfrak{Q}\cos\varphi-\mathfrak{q}\sin\varphi=\alpha\cos\varphi+\beta f\cos 2\varphi+\gamma f^2\cos 3\varphi+\ldots,$$

folglich:

$$\mathfrak{R}=f(\mathfrak{Q}\cos\varphi-\mathfrak{q}\sin\varphi).$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{Q}\sin\varphi+\mathfrak{q}\cos\varphi=\alpha\sin\varphi+\beta f\sin 2\varphi+\gamma f^2\sin 3\varphi+\ldots,$$

demnach:

$$\mathfrak{r}=f(\mathfrak{Q}\sin\varphi+\mathfrak{q}\cos\varphi).$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=(\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2)f\sin\varphi$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{r}-\mathfrak{p}\mathfrak{R}=(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi+(\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q})f\cos\varphi.$$

Folglich ist:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2}+\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{a}=-\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2}\cdot\frac{1}{f\sin\varphi}.$$

Es wird mithin der aus dem Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ des Nenners entstehende Partialbruch gleich

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(f\cos\varphi - z)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)f\sin\varphi},$$

oder da $f = \frac{p}{q}$ ist, gleich

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})p\sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(p\cos\varphi - qz)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)p\sin\varphi}.$$

§ 205.

Dieser Partialbruch entspringt also aus dem Factor $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ des Nenners der gegebenen Function:

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)Z},$$

und zwar findet man die Werte von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{q}$ aus den Functionen M und Z auf folgende Weise: Man schreibe die Functionen M und Z in entwickelter Form, wie folgt:

$$\begin{aligned} M &= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots \\ Z &= \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots, \end{aligned}$$

und setze dann einmal:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi; \text{ dadurch wird: } M = \mathfrak{P} \text{ und } Z = \mathfrak{Q},$$

und ferner:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi; \text{ dadurch wird: } M = \mathfrak{p},\ Z = \mathfrak{q}.$$

Man erhält folglich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= A + B\frac{p}{q}\cos\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \cdots \\ \mathfrak{p} &= \phantom{A +{}} B\frac{p}{q}\sin\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \cdots \\ \mathfrak{Q} &= \alpha + \beta\frac{p}{q}\cos\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \cdots \\ \mathfrak{q} &= \phantom{\alpha +{}} \beta\frac{p}{q}\sin\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \cdots \end{aligned}$$

§ 206.

Es ist jedoch aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass eine solche Zerlegung **nicht** stattfindet, wenn die **Function** Z eben **denselben** **Factor** $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ **auch noch in sich enthält.** Denn alsdann würde, wenn man in der Gleichung

$$M = \mathfrak{A}Z + \mathfrak{a}Zz$$

die Substitution

$$z^n = f^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$$

macht, die Grösse Z an und für sich verschwinden, und man könnte daraus nichts weiter folgern.

Wenn daher der **Nenner** der gebrochenen Function $\frac{M}{N}$ den **Factor** $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2$ **oder eine noch höhere Potenz desselben enthält,** so muss man ein **besonderes** Verfahren anwenden, um die Zerlegung zu bewerkstelligen. Es sei also:

$$N = (p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2 Z,$$

und die aus dem Factor $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2$ des Nenners entspringenden Partialbrüche seien:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2},$$

wobei die constanten Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ noch zu bestimmen sind.

§ 207.

Unter dieser Voraussetzung muss der Ausdruck:

$$\frac{M - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z)Z - (\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z)Z(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^2}$$

eine ganze Function, und somit der Zähler durch den Nenner teilbar sein. Es muss also zunächst der Ausdruck $M - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z)Z$ sich durch $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ teilen lassen, und da dies der vorhergehende Fall ist, so werden auch die Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ auf dieselbe Weise bestimmt. Setzt man daher:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi, \text{ so wird } M = \mathfrak{P} \text{ und } Z = \mathfrak{N};$$

setzt man aber:

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi, \text{ so wird } M = \mathfrak{p} \text{ und } Z = \mathfrak{n},$$

und hieraus ergiebt sich nach der oben angegebenen Regel:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

§ 208.

Sind auf diese Weise $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ gefunden, so wird ferner

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}$$

eine ganze Function, welche gleich P gesetzt werden möge. Dann muss auch $P-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z$ durch $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ teilbar sein, und da dieser Ausdruck eine ähnliche Gestalt hat wie der vorhergehende, so wird, wenn für

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad P \text{ in } \mathfrak{R}$$

und für

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad P \text{ in } \mathfrak{r}$$

übergeht:

$$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{b}=-\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

§ 209.

Hieraus kann man schon allgemein folgern, wie die Zerlegung zu geschehen habe, wenn der Nenner der gegebenen Function $\frac{M}{N}$ den Factor

$$(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$$

hat. Es sei also

$$N=(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k\,Z,$$

und daher die zu zerlegende gebrochene Function die folgende:

$$\frac{M}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k\,Z}.$$

Ferner liefere der Factor $(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$ des Nenners folgende Partialbrüche:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-1}}$$
$$+\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-2}}+\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{d}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-3}}+\cdots$$

Nun möge

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad M \text{ in } \mathfrak{M} \text{ und } Z \text{ in } \mathfrak{N}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad M \text{ in } \mathfrak{m} \text{ und } Z \text{ in } \mathfrak{n}$$

übergehen; alsdann wird:

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N}+\mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n}-\mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{a}=-\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n}-\mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Setzt man sodann:

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=P,$$

und ist

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad P=\mathfrak{P}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad P=\mathfrak{p},$$

so wird:

$$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N}+\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{b}=-\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Weiter setze man:

$$\frac{P-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=Q,$$

und es gehe

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad Q \text{ in } \mathfrak{Q}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad Q \text{ in } \mathfrak{q}$$

über, dann ist:

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N}+\mathfrak{q}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{c}=-\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Ebenso sei:

$$\frac{Q-(\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z)}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=R,$$

und ferner

$$\text{für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \qquad R=\mathfrak{R}$$

$$\text{und für } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \qquad R=\mathfrak{r};$$

dann ist:

$$\mathfrak{D}=\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{d}=-\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

In dieser Weise hat man nun fortzugehen, bis man den Zähler des letzten Bruches, dessen Nenner gleich $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ ist, gefunden hat.

Beispiel.

Es sei der Bruch:

$$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}$$

gegeben, und die Partialbrüche, welche aus dem Factor $(1+z^2)^4$ entspringen, seien:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(1+z^2)^4}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{(1+z^2)^3}+\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z}{(1+z^2)^2}+\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{d}z}{1+z^2}.$$

Vergleicht man nun diese Form mit der allgemeinen, so wird:

$$p=1,\ q=1,\ \cos\varphi=0,\ \text{d. i. } \varphi=\frac{\pi}{2}$$

und ferner:

$$M=z-z^3,\ Z=1+z^4.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{M}=0,\ \mathfrak{m}=2,\ \mathfrak{N}=2,\ \mathfrak{n}=0,\ \sin\varphi=1,$$

mithin:

$$\mathfrak{A}=-\frac{4}{4}\cdot 0=0,\ \mathfrak{a}=1.$$

Es ist daher:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z=z,$$

ferner:

$$P=\frac{z-z^3-z-z^5}{1+z^2}=-z^3;$$

folglich:

$$\mathfrak{P}=0,\ \mathfrak{p}=1$$

und:

$$\mathfrak{B}=0,\ \mathfrak{b}=\frac{1}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z=\frac{1}{2}z \text{ und } Q=\frac{-z^3-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^5}{1+z^2}=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^3,$$

folglich:

$$\mathfrak{Q}=0 \text{ und } \mathfrak{q}=0,$$

also:

$$\mathfrak{C}=0,\ \mathfrak{c}=0.$$

Schliesslich wird:

$$R=-\frac{\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^3}{1+z^2}=-\frac{1}{2}z,$$

demnach:

$$\mathfrak{R}=0,\ \mathfrak{r}=-\frac{1}{2}$$

und:

$$\mathfrak{D}=0,\ \mathfrak{d}=-\frac{1}{4}.$$

Es sind daher die gesuchten Brüche:

$$\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{z}{2(1+z^2)^3}-\frac{z}{4(1+z^2)}.$$

Der Zähler des noch übrigen Bruches aber ist:

$$S=\frac{R-(\mathfrak{D}+\mathfrak{d}z)}{1+z^2}=-\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^3.$$

Der Bruch selbst wird daher gleich

$$\frac{-z+z^3}{4(1+z^4)}$$

sein.

§ 210.

Auf diese Weise ist daher zugleich der Ergänzungsbruch gefunden, welcher mit den gefundenen Brüchen zusammengenommen die gegebene Function ergiebt. Hat man nämlich für den Bruch:

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k Z}$$

alle Partialbrüche gefunden, die aus dem Factor $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k$ entspringen, und setzt man die Reihe der zur Bildung derselben erforderlichen Functionen P, Q, R, S, T noch weiter fort, so ist diejenige von diesen Grössen, welche auf die letzte der zur Aufsuchung der Zähler verwendeten Functionen folgt, der Zähler des noch übrigen Bruches mit dem Nenner Z. Für $k = 1$ ist nämlich der noch übrige Bruch gleich $\frac{P}{Z}$, für $k = 2$ gleich $\frac{Q}{Z}$, für $k = 3$ gleich $\frac{R}{Z}$ u. s. w. Hat man aber diesen noch übrigen Bruch mit dem Nenner Z gefunden, so kann man denselben nach den angegebenen Regeln noch weiter zerlegen.

13. Capitel.

Von den rekurrenten Reihen.

§ 211.

Zu dieser Art von Reihen, welche Moivre **rekurrente** zu nennen pflegt, rechne ich alle diejenigen **Reihen, welche** aus der durch wirkliche **Division** ausgeführten Entwicklung einer jeden **gebrochenen Function entstehen.** Wir haben von diesen Reihen schon früher gezeigt, dass sich ein jedes ihrer Glieder aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden nach einem unveränderlichen Gesetze, welches vom Nenner der gebrochenen Function abhängt, bestimmt. Da ich aber soeben dargetan habe, dass sich jede gebrochene Function in andere einfachere zerlegen lässt, so folgt hieraus, dass auch jede rekurrente Reihe in andere einfachere zerlegt werden kann. In diesem Capitel soll daher die **Zerlegung der rekurrenten Reihen** irgend welchen Grades in **andere einfachere** untersucht werden.

§ 212.

Ist die echte gebrochene Function:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

gegeben, und entwickelt man dieselbe durch Ausführung der Division in die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots,$$

so ist das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortschreiten, aus dem früheren bekannt. Wenn man nun jene gebrochene Function in ihre einfachen Brüche zerlegt und einen jeden derselben in eine rekurrente Reihe entwickelt, so muss offenbar die Summe aller dieser aus den Partialbrüchen entstandenen Reihen gleich der rekurrenten Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots$$

sein. Es geben also die Partialbrüche, welche wir nach dem Früheren finden können, Partialreihen, deren Beschaffenheit man wegen ihrer Einfachheit leicht erkennt. Da nun die Partialreihen zusammengenommen wieder die gegebene rekurrente Reihe hervorbringen, so wird man auch **durch die Partialreihen eine tiefere Einsicht in die Natur der rekurrenten Reihe** erlangen können.

§ 213.

Die aus den einzelnen Partialbrüchen entstandenen rekurrenten Reihen seien:

$$\begin{array}{l} a\ +bz\ +cz^2\ +dz^3\ +ez^4\ +\cdots \\ a'\ +b'z\ +c'z^2\ +d'z^3\ +e'z^4\ +\cdots \\ a''\ +b''z\ +c''z^2\ +d''z^3\ +e''z^4\ +\cdots \\ a'''+b'''z+c'''z^2+d'''z^3+e'''z^4+\cdots \end{array}$$

u. s. w.

Da diese zusammengenommen der folgenden Reihe:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$$

gleich sein sollen, so muss notwendig:

$$\begin{aligned} A &= a+a'+a''+a'''+\cdots \\ B &= b+b'+b''+b'''+\cdots \\ C &= c+c'+c''+c'''+\cdots \\ D &= d+d'+d''+d'''+\cdots \end{aligned}$$

u. s. w.

sein. Wenn man daher in den einzelnen Reihen, welche aus den Partialbrüchen entstanden sind, die Coefficienten der Potenz z^n bestimmen kann, so giebt deren Summe den Coefficienten der Potenz z^n in der rekurrenten Reihe $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$

§ 214.

Es könnte hier jedoch der Zweifel entstehen, ob denn auch aus der **Gleichheit** zweier solchen Reihen:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}z^2+\mathfrak{D}z^3+\cdots$$

mit Notwendigkeit folge, dass die Coefficienten gleicher Potenzen von z in beiden Reihen gleich seien, oder dass $A=\mathfrak{A}$, $B=\mathfrak{B}$, $C=\mathfrak{C}$, $D=\mathfrak{D}$ u. s. w. sei. Dieser Zweifel wird leicht gehoben, wenn man bedenkt, dass jene Gleichheit bestehen soll, was auch z für einen Wert erhalten möge. Ist also $z=0$, so ist offenbar $A=\mathfrak{A}$. Zieht man diese gleichen

Glieder beiderseits ab und dividirt alsdann die übrige Gleichung durch z, so wird:

$$B+Cz+Dz^2+\cdots=\mathfrak{B}+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}z^2+\cdots,$$

und somit $B=\mathfrak{B}$. Ebenso zeigt man, dass $C=\mathfrak{C}$, $D=\mathfrak{D}$ u. s. w. ist.

§ 215.

Wir betrachten also die Reihen, welche aus den Partialbrüchen, in die ein gegebener Bruch zerlegt werden kann, entstehen.

Nun giebt zunächst der Bruch

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}$$

bekanntlich die Reihe:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}pz+\mathfrak{A}p^2z^2+\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

deren allgemeines Glied

$$\mathfrak{A}p^nz^n$$

ist. Man nennt nämlich diesen Ausdruck in der Regel das allgemeine Glied, weil aus ihm dadurch, dass man für n der Reihe nach alle Zahlen setzt, sämtliche Glieder der Reihe hervorgehen.

Ferner entsteht aus dem Bruche

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^2}$$

die Reihe:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^2}=\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}pz+3\mathfrak{A}p^2z^2+4\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

deren allgemeines Glied ist:

$$(n+1)\mathfrak{A}p^nz^n.$$

Ebenso ist der Bruch:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^3}=\mathfrak{A}+3\mathfrak{A}pz+6\mathfrak{A}p^2z^2+10\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

und das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^nz^n.$$

Ueberhaupt aber giebt der Bruch

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$$

die folgende Reihe:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}=\mathfrak{A}+k\mathfrak{A}pz+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^2z^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

und das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\mathfrak{A}p^n z^n.$$

Nach dem zu schliessen, wie die Reihe selbst fortschreitet, würde man als allgemeines Glied derselben den Ausdruck:

$$\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\mathfrak{A}p^n z^n$$

erhalten; dieser ist jedoch dem vorigen gleich, was man einsieht, wenn man kreuzweis multiplicirt. Denn es ist:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots(n+k-1)=1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)\cdot k\ldots(k+n-1),$$

und zwar ist dies eine identische Gleichung.

§ 216.

So oft man also bei der Zerlegung gebrochener Functionen auf Partialbrüche von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$ kommt, kann man das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$, welche aus jener gebrochenen Function entsteht, angeben. Es ist dasselbe nämlich gleich der Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, welche aus den Partialbrüchen hervorgehen.

Erstes Beispiel.

Das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe zu finden, welche aus dem Bruche:

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

entsteht.

Die sich hieraus ergebende Reihe ist:

$$1+0z+2z^2+2z^3+6z^4+10z^5+22z^6+42z^7+86z^8+\cdots$$

Um den Coefficienten der Potenz z^n zu finden, zerlege man den Bruch

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

in

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z}.$$

Hieraus ergiebt sich als allgemeines Glied:

$$\left(\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}2^n\right)z^n=\frac{2^n\pm 2}{3}z^n,$$

wobei das Zeichen + oder — zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Zweites Beispiel.

Das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe:

$$1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+\cdots,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{1-z}{1-5z+6z^2}$$

entspringt, zu finden.

Da der Nenner des gegebenen Bruches gleich $(1-2z)(1-3z)$ ist, so lässt sich der Bruch in die beiden:

$$\frac{-1}{1-2z}+\frac{2}{1-3z}$$

zerlegen; und aus diesen folgt als allgemeines Glied:

$$2\cdot 3^n z^n-2^n z^n=(2\cdot 3^n-2^n)z^n.$$

Drittes Beispiel.

Das allgemeine Glied der Reihe:

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+\cdots,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$$

entspringt, zu finden.

Da der Nenner dieses Bruches die beiden Factoren $1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z$ und $1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z$ besitzt, so erhält man, wenn man den Bruch zerlegt,

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z},$$

und hieraus folgt als allgemeines Glied:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n.$$

Viertes Beispiel.

Das allgemeine Glied der Reihe:

$$a + (\alpha a + b)z + (\alpha^2 a + \alpha b + \beta a)z^2 + (\alpha^3 a + \alpha^2 b + 2\alpha\beta a + \beta b)z^3 + \cdots,$$

welche durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{a + bz}{1 - \alpha z - \beta z^2}$$

entsteht, zu finden.

Zerlegt man den gegebenen Bruch, so erhält man folgende Partialbrüche:

$$\frac{\left(a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha)+2b\right):2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z} + \frac{\left(a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha)-2b\right):2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z}$$

und hieraus folgt als allgemeines Glied:

$$\frac{a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha)+2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^n z^n + \frac{a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha)-2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)$$

Aus diesem lassen sich die allgemeinen Glieder aller derjenigen rekurrenten Reihen, bei denen jedes Glied durch die beiden vorhergehenden bestimmt wird, leicht finden.

Fünftes Beispiel.

Das allgemeine Glied der Reihe:

$$1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + 4z^7 + \cdots,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{1}{1 - z - z^2 + z^3} = \frac{1}{(1-z)^2\,(1+z)}$$

entspringt, zu finden.

Hier ist zwar das Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, auf den ersten Blick ersichtlich, so dass keine weitere Auseinandersetzung erforderlich wäre. Da indessen die Partialbrüche:

$$\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1-z} + \frac{\frac{1}{4}}{1+z}$$

sich ergeben, so erhält man daraus das allgemeine Glied:

$$\frac{1}{2}(n+1)z^n + \frac{1}{4}z^n + \frac{1}{4}(-1)^n z^n = \frac{2n+3\pm 1}{4}z^n,$$

wo das Zeichen + oder —1 gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§ 217.

Auf diese Weise würde man die allgemeinen Glieder aller rekurrenten Reihen finden können, da sich alle Brüche in solche einfachen Partialbrüche zerlegen lassen. Will man aber imaginäre Ausdrücke vermeiden, so kommt man häufig auf Partialbrüche wie:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2},\quad \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^2},\quad \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^k},$$

und wir müssen daher zusehen, welcher Art die Reihen sind, die aus der Entwicklung dieser entspringen. Nun giebt zwar zunächst der Bruch:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2},$$

wenn man ihn entwickelt, wegen der Formel:

$$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi,$$

die Reihe:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}pz\cos\varphi + 2\mathfrak{A}p^2z^2\cos 2\varphi + 2\mathfrak{A}p^3z^3\cos 3\varphi + 2\mathfrak{A}p^4z^4\cos 4\varphi + \cdots \\ \qquad\qquad + \mathfrak{A}p^2z^2 \qquad\quad + 2\mathfrak{A}p^3z^3\cos\varphi \;\; + 2\mathfrak{A}p^4z^4\cos 2\varphi + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathfrak{A}p^4z^4 \qquad\quad + \cdots \end{array}$$

u. s. w.;

indessen lässt sich daraus das allgemeine Glied nicht so leicht erkennen.

§ 218.

Wir wollen daher, um unsern Zweck zu erreichen, die beiden Reihen betrachten:

$$Ppz\sin\varphi + Pp^2z^2\sin 2\varphi + Pp^3z^3\sin 3\varphi + Pp^4z^4\sin 4\varphi + \cdots$$

$$Q + Qpz\cos\varphi + Qp^2z^2\cos 2\varphi + Qp^3z^3\cos 3\varphi + Qp^4z^4\cos 4\varphi + \cdots,$$

welche jedenfalls aus der Entwicklung eines Bruches mit dem Nenner $1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2$ entspringen. Es entsteht nämlich die erstere der beiden Reihen aus dem Bruche:

$$\frac{Ppz\sin\varphi}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2},$$

die letztere dagegen aus dem folgenden:

$$\frac{Q - Qpz\cos\varphi}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2}.$$

Addirt man diese beiden Brüche, so giebt ihre Summe

$$\frac{Q + Ppz\sin\varphi - Qpz\cos\varphi}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2}$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$(P\sin n\varphi + Q\cos n\varphi)p^n z^n$$

Dieser Bruch wird aber dem gegebenen Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2}$$

gleich, wenn man

$$Q = \mathfrak{A} \text{ und } P = \mathfrak{A}\cot\varphi + \mathfrak{B}\operatorname{cosec}\varphi$$

setzt. Folglich ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{\mathfrak{A}\cos\varphi\sin n\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi + \mathfrak{A}\sin\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}p^n z^n = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^n z^n.$$

§ 219.

Um das allgemeine Glied in dem Falle zu finden, wenn der Nenner des Bruches eine **Potenz** von der Form

$$(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^k$$

ist, ist es bequemer, diesen Bruch in zwei, wenn auch imaginäre Brüche zu zerlegen, nämlich in:

$$\frac{a}{(1 - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k} + \frac{b}{(1 - (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k}.$$

Dann ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus diesen beiden Brüchen zusammengenommen entsteht, gleich:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\dots(k-1)}(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi)ap^n z^n$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\dots(k-1)}(\cos n\varphi - \sqrt{-1}\sin n\varphi)bp^n z^n.$$

Setzt man daher:

$$a + b = f,\quad a - b = \frac{g}{\sqrt{-1}},$$

also dass

$$a = \frac{f\sqrt{-1} + g}{2\sqrt{-1}} \quad\text{und}\quad b = \frac{f\sqrt{-1} - g}{2\sqrt{-1}}$$

ist, so ist der Ausdruck:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\dots(k-1)}(f\cos n\varphi + g\sin n\varphi)p^n z^n$$

das allgemeine Glied der Reihe, welche aus den beiden Brüchen:

$$\frac{\frac{1}{2}f + \frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1 - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k} + \frac{\frac{1}{2}f - \frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1 - (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^k},$$

oder aus diesem einzigen Bruche:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} f - kfpz\cos\varphi + \frac{k(k-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\cos2\varphi - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}fp^3z^3\cos3\varphi + \cdots \\ + kgpz\sin\varphi - \frac{k(k-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\sin2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}fp^3z^3\sin3\varphi - \cdots \end{array}\right\}}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^k}$$

entsteht.

§ 220.

Setzt man also $k = 2$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{f - 2pz(f\cos\varphi - g\sin\varphi) + p^2z^2(f\cos2\varphi - g\sin2\varphi)}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^2}$$

entsteht, gleich:

$$(n+1)(f\cos n\varphi + g\sin n\varphi)p^n z^n.$$

Nun ist aber (nach § 218 für $\mathfrak{B} = 0$) das allgemeine Glied der Reihe, welche sich aus dem Bruche:

$$\frac{a}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2} = \frac{a - 2apz\cos\varphi + ap^2z^2}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^2}$$

ergiebt, gleich:

$$\frac{a\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}p^n z^n.$$

Addirt man also diese beiden Brüche und setzt darauf:

$$\begin{gathered} a+f=\mathfrak{A} \\ 2a\cos\varphi + 2f\cos\varphi - 2g\sin\varphi = -\mathfrak{B} \\ a + f\cos 2\varphi - g\sin 2\varphi = 0, \end{gathered}$$

wodurch

$$\begin{aligned} g &= \frac{\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}\cos\varphi}{2\sin\varphi} = \frac{\mathfrak{B}\sin\varphi + \mathfrak{A}\sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi} \\ a &= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos\varphi}{1-\cos 2\varphi} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} \\ f &= -\frac{\mathfrak{A}\cos 2\varphi + \mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

wird, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi + p^2z^2)^2}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^3\varphi}\sin(n+1)\varphi p^n z^n$$

$$+(n+1)\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi\sin n\varphi + \mathfrak{A}\sin 2\varphi\sin n\varphi - \mathfrak{B}\cos\varphi\cos n\varphi - \mathfrak{A}\cos 2\varphi\cos n\varphi}{2\sin^2\varphi}p^n z^n$$

$$= -\frac{(n+1)\left(\mathfrak{A}\cos(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi\right)}{2\sin^2\varphi}p^n z^n$$

$$+ \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi)\sin(n+1)\varphi}{2\sin^3\varphi}p^n z^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+3)\sin(n+1)\varphi - \frac{1}{2}(n+1)\sin(n+3)\varphi}{2\sin^3\varphi}\mathfrak{A}p^n z^n$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(n+2)\sin n\varphi = \frac{1}{2}n\sin(n+2)\varphi}{2\sin^3\varphi}\mathfrak{B}p^n z^n.$$

Es ist daher schliesslich das gesuchte allgemeine Glied der aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi + p^2z^2)^2}$$

entstehenden Reihe gleich:

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi - (n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}\mathfrak{A}p^n z^n$$

$$+ \frac{(n+2)\sin n\varphi - n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}\mathfrak{B}p^n z^n.$$

§ 221.

Ist $k=3$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{f - 3pz(f\cos\varphi - g\sin\varphi) + 3p^2z^2(f\cos 2\varphi - g\sin 2\varphi) - p^3z^3(f\cos 3\varphi - g\sin 3\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi + p^2z^2)^3}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}(f\cos n\varphi + g\sin n\varphi)p^n z^n.$$

Ferner aber ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche:

$$\frac{a+bpz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2} = \frac{a - pz(2a\cos\varphi - b) + p^2z^2(a - 2b\cos\varphi) + bp^3z^3}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3}$$

entstehenden Reihe gleich:

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi - (n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}ap^n z^n$$

$$+ \frac{(n+2)\sin n\varphi - n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}bp^n z^n.$$

Addirt man jene beiden Brüche und setzt darauf den Zähler gleich $\mathfrak{A}$ so wird:

$$\begin{aligned} a+f&=\mathfrak{A} \\ 3f\cos\varphi - 3g\sin\varphi + 2a\cos\varphi - b &= 0 \\ 3f\cos 2\varphi - 3g\sin 2\varphi + a - 2b\cos\varphi &= 0 \\ f\cos 3\varphi - g\sin 3\varphi - b &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{f\cos 3\varphi - g\sin 3\varphi - 3f\cos\varphi + 3g\sin\varphi}{2\cos\varphi} \\ &= 2g\sin^2\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi - f - 2f\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Ferner findet man:

$$\frac{f}{g} = \frac{\sin 5\varphi - 2\sin 3\varphi + \sin\varphi}{\cos 5\varphi - 2\cos 3\varphi + \cos\varphi}, \quad \text{und}$$

$$a + f = \mathfrak{A} = 2g\sin^2\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi - 2f\sin^2\varphi,$$

also:

$$\frac{\mathfrak{A}}{2\sin^2\varphi} = \frac{g\sin\varphi - f\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

Hieraus wird schliesslich:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\mathfrak{A}(\sin\varphi - 2\sin 3\varphi + \sin 5\varphi)}{16\sin^5\varphi} \\ g &= \frac{\mathfrak{A}(\cos\varphi - 2\cos 3\varphi + \cos 5\varphi)}{16\sin^5\varphi}, \end{aligned}$$

und da

$$16 \sin^5\varphi = \sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin\varphi$$

ist, so wird:

$$a = \frac{\mathfrak{A}\,(\;9 \sin\;\varphi - 3 \sin 3\varphi)}{16 \sin^5\varphi}$$

$$b = \frac{\mathfrak{A}\,(-\sin 2\varphi + \;\sin 2\varphi)}{16 \sin^5\varphi} = 0.$$

Endlich ist noch:

$$3 \sin\varphi - \sin 3\varphi = 4 \sin^3\varphi;$$

demnach:

$$a = \frac{3\mathfrak{A}}{4 \sin^2\varphi}.$$

Folglich ist das gesuchte allgemeine Glied:

$$\frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2}\,\mathfrak{A} p^n z^n\,\frac{\sin(n+1)\varphi - 2\sin(n+3)\varphi + \sin(n+5)\varphi}{16 \sin^5\varphi}$$

$$+\;3\,\mathfrak{A} p^n z^n\,.\,\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi - (n+1)\sin(n+3)\varphi}{16\sin^5\varphi}$$

$$= \frac{\mathfrak{A} p^n z^n}{16 \sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+4)\,(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi - \frac{2\,(n+1)\,(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\right\}.$$

§ 222.

Es ist daher das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} p z}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2 z^2)^3}$$

entspringt, gleich:

$$\frac{\mathfrak{A} p^n z^n}{16 \sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+4)\,(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi - \frac{2\,(n+1)\,(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\right\}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B} p^n z^n}{16 \sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+3)\,(n+4)}{1\cdot 2}\sin n\varphi - \frac{2\,n\,(n+4)}{1\cdot 2}\sin(n+2)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2}\sin(n+4)\varphi\right\}.$$

Geht man noch weiter vorwärts, so findet man ebenso für die aus dem Bruche:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} p z}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2 z^2)^4}$$

entstehende Reihe das allgemeine Glied:

$$\frac{\mathfrak{A} p^n z^n}{64 \sin^7\varphi}\left\{\frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+1)\varphi - \frac{3\,(n+1)(n+7)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+3)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{3\,(n+1)(n+2)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+5)\varphi - \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+7)\varphi\right\}$$
$$+ \frac{\mathfrak{B} p^n z^n}{64 \sin^7\varphi}\left\{\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin n\varphi - \frac{3n\,(n+6)\,(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+2)\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{3n\,(n+1)\,(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+4)\varphi - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+6)\varphi\right\}.$$

Aus diesen Ausdrücken ist leicht ersichtlich, wie die Formeln für die allgemeinen Glieder der Reihen, welche aus noch höheren Potenzen entspringen, weiter fortgehen. Um aber in die Art und Weise, wie sie entstehen, einen tieferen Einblick zu gewinnen, ist es gut, sich die Gleichungen zu merken:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \sin\varphi \\
4\sin^3\varphi &= 3\sin\varphi - \sin 3\varphi \\
16\sin^5\varphi &= 10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\varphi \\
64\sin^7\varphi &= 35\sin\varphi - 21\sin 3\varphi + 7\sin 5\varphi - \sin 7\varphi \\
256\sin^9\varphi &= 126\sin\varphi - 84\sin 3\varphi + 36\sin 5\varphi - 9\sin 7\varphi + \sin 9\varphi
\end{aligned}$$

u. s. w.

§ 223.

Da man also auf diese Weise alle gebrochenen Functionen in reelle Partialbrüche zerlegen kann, so kann man auch die allgemeinen Glieder aller rekurrenten Reihen in reeller Form darstellen. Um dies desto deutlicher zu machen, wollen wir noch einige Beispiele hinzufügen.

Erstes Beispiel.

Aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6}$$

entsteht die rekurrente Reihe:

$$1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 7z^6 + 8z^7 + 10z^8 + 12z^9 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied gesucht wird.

Ordnet man den gegebenen Bruch nach seinen Factoren wie folgt:

$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)},$$

so giebt die Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{1}{6(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}+\frac{17}{72(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}.$$

Von diesen giebt

der erste $\frac{1}{6(1-z)^3}$ das allgemeine Glied: $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\frac{1}{6}z^n = \frac{n^2+3n+2}{12}z^n,$

der zweite $\frac{1}{4(1-z)^2}$ „ „ „ $\frac{n+1}{4}z^n,$

der dritte $\frac{17}{72(1-z)}$ „ „ „ $\frac{17}{72}z^n,$

der vierte $\frac{1}{8(1+z)}$ „ „ „ $\frac{1}{8}(-1)^n z^n.$

Vergleicht man ferner den fünften Bruch

$$\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}$$

mit der allgemeinen Form

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2} \quad (\S\ 218),$$

so wird:

$$p = 1,\ \varphi=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\ \mathfrak{A}=\frac{2}{9},\ \mathfrak{B}=-\frac{1}{9},$$

und es ist daher das allgemeine Glied, welches daraus entsteht, gleich:

$$\frac{2\sin(n+1)\varphi-\sin n\varphi}{9\sin\varphi}(-1)^n z^n=\frac{4\sin(n+1)\varphi-2\sin n\varphi}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n$$

$$=\frac{4\sin(n+1)\frac{\pi}{3}-2\sin n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n.$$

Vereinigt man alle diese Ausdrücke zu einer Summe, so ergiebt sich als allgemeines Glied der gegebenen Reihe:

$$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{47}{72}\right)z^n \pm \frac{1}{8}z^n \pm \frac{4\sin(n+1)\frac{\pi}{3}-2\sin n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}}z^n,$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Dabei beachte man, dass, wenn n eine Zahl von der Form $3m$ ist: $\frac{4\sin\frac{1}{3}(n+1)\pi-2\sin\frac{1}{3}n\pi}{9\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{9}$ ist. Ist dagegen n von der Form $3m+1$, so wird dieser Ausdruck gleich $\pm\frac{1}{9}$, und ist n von der Form $3m+2$, so wird derselbe gleich $\mp\frac{1}{9}$, und zwar ist hier jedesmal das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Hiernach können wir die Beschaffenheit der Reihe auch so ausdrücken, dass wir sagen:

Ist	so ist ihr allgemeines Glied:
$n=6m+0$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1\right)z^n$
$n=6m+1$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12}\right)z^n$
$n=6m+2$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3}\right)z^n$
$n=6m+3$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\right)z^n$
$n=6m+4$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3}\right)z^n$
$n=6m+5$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12}\right)z^n.$

So gilt z. B., wenn $n=50$ ist, die Form: $n=6m+2$, und das betreffende Glied der Reihe ist gleich $234\,z^{50}$.

Zweites Beispiel.

Aus dem Bruche:

$$\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$$

entsteht die rekurrente Reihe:

$$1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7+7z^8+\cdots$$

Man soll das allgemeine Glied derselben finden.

Der gegebene Bruch kann auf die Form:

$$\frac{1+z+z^2}{(1-z)^2(1+z)(1+z^2)}$$

gebracht und daher in die folgenden Partialbrüche zerlegt werden:

$$\frac{3}{4(1-z)^2}+\frac{3}{8(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{-1+z}{4(1+z^2)}.$$

Der erste derselben $\frac{3}{4(1-z)^2}$ giebt das allgemeine Glied $\frac{3(n+1)}{4} z^n$,

" zweite " $\frac{3}{8(1-z)}$ " " " " $\frac{3}{8} z^n$,

" dritte " $\frac{1}{8(1+z)}$ " " " " $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$.

Ferner erhält man aus der Vergleichung des vierten Bruches

$$\frac{-1+z}{4(1+z^2)}$$

mit der allgemeinen Form $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$:

$$p=1,\ \cos\varphi=0 \text{ oder } \varphi=\frac{\pi}{2},\ \text{ und } \mathfrak{A}=-\frac{1}{4},\ \mathfrak{B}=+\frac{1}{4}.$$

Es wird daher das aus diesem Bruche entstehende allgemeine Glied gleich:

$$\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{n+1}{2}\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{n}{2}\pi\right)z^n,$$

und somit das gesuchte allgemeine Glied der gegebenen Reihe gleich:

$$\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{8}\right)z^n \pm \frac{1}{8}z^n - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{n+1}{2}\pi - \sin\frac{n}{2}\pi\right)z^n.$$

Ist daher	so ist das allgemeine Glied:
$n=4m+0$	$\left(\frac{3}{4}n+1\right)z^n$
$n=4m+1$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{5}{4}\right)z^n$
$n=4m+2$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{2}\right)z^n$
$n=4m+3$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{4}\right)z^n$.

Ist also z. B. $n=50$, so ist n von der Form $4m+2$, und das betreffende Glied der Reihe ist gleich $39z^{50}$.

§ 224.

Ist daher eine rekurrente Reihe gegeben, so kann man auch, da sich der Bruch, aus dem sie entsteht, leicht angeben lässt, das allgemeine Glied derselben nach den angeführten Regeln finden.

Man kann aber an dem Gesetz, nach welchem jedes Glied der rekurrenten Reihe aus den vorhergehenden gebildet wird, sogleich den Nenner des Bruches erkennen, dessen Factoren dann die Form des allgemeinen Gliedes geben, während durch den Zähler nur die Coefficienten desselben bestimmt werden. Es sei z. B. die rekurrente Reihe

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\cdots$$

gegeben, und es sei aus dem Gesetze, nach welchem sich jedes Glied aus einer gewissen Anzahl der vorhergehenden bestimmt, als Nenner des Bruches der folgende gefunden:

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3,$$

so wird:

$$D=\alpha C+\beta B+\gamma A,\quad E=\alpha D+\beta C+\gamma B,\quad F=\alpha E+\beta D+\gamma C,\ \ldots$$

Nennt man daher nach Moivre die Multiplikatoren $+\alpha, +\beta, +\gamma$ die **Beziehungsskala**, so beruht das Fortschreitungsgesetz der Reihe gerade auf dieser Beziehungsskala, und diese ergiebt zugleich den Nenner des Bruches, durch dessen Entwicklung die rekurrente Reihe entsteht.

§ 225.

Wenn man also das allgemeine Glied oder den Coefficienten irgend einer Potenz z^n finden will, so muss man die einfachen oder doppelten Factoren des Nenners $1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3$ suchen, und zwar letztere in dem Falle, wo man die imaginären Factoren vermeiden will. Sind dann zunächst die einfachen Factoren alle von einander verschieden und reell, der Nenner also gleich:

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz),$$

und ergiebt die Zerlegung des die gegebene Reihe erzeugenden Bruches die Partialbrüche:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}+\frac{\mathfrak{C}}{1-rz},$$

so ist das allgemeine Glied der Reihe gleich:

$$(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n)z^n.$$

Sind aber zwei Factoren einander gleich, also etwa $q=p$, so ist dasselbe von der Form:

$$((\mathfrak{A}n+\mathfrak{B})p^n+\mathfrak{C}r^n)z^n;$$

und sind alle drei einander gleich, also $p=q=r$, so ist das allgemeine Glied von der Form:

$$(\mathfrak{A}n^2+\mathfrak{B}n+\mathfrak{C})p^nz^n.$$

Besitzt jedoch der Nenner $1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3$ einen zweifachen Factor, ist derselbe also gleich

$$(1-pz)(1-2qz\cos\varphi+q^2z^2),$$

so ist das allgemeine Glied der Reihe gleich:

$$\left(\mathfrak{A}p^n+\frac{\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{C}\sin n\varphi}{\sin\varphi}q^n\right)z^n.$$

Da sich nun hieraus, wenn man für n der Reihe nach die Werte 0, 1, 2 setzt, die Glieder A, Bz, Cz^2 ergeben müssen, so lassen sich dadurch die Werte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmen.

§ 226.

Ist die Beziehungsskala zweigliedrig, d. h. wird jedes Glied aus den beiden vorhergehenden bestimmt, so dass

$$C=\alpha B-\beta A,\quad D=\alpha C-\beta B,\quad E=\alpha D-\beta C,\ldots$$

ist, so entsteht die rekurrente Reihe, welche wir gleich

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+\cdots$$

setzen wollen, offenbar aus einem Bruche, dessen Nenner $1-\alpha z+\beta z^2$ ist. Setzt man nun diesen Nenner gleich $(1-pz)(1-qz)$, so ist:

$$p+q=\alpha,\ pq=\beta,$$

und das allgemeine Glied der Reihe ist:

$$(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n)z^n.$$

Hieraus erhält man für $n=0$:

$$A=\mathfrak{A}+\mathfrak{B},$$

und für $n=1$:

$$B=\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q,$$

woraus folgt:

$$Aq-B=\mathfrak{A}(q-p),$$

und somit:

$$\mathfrak{A}=\frac{Aq-B}{q-p},\quad \mathfrak{B}=\frac{Ap-B}{p-q}.$$

Nachdem man so die Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden hat, erhält man

$$P=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n,\quad Q=\mathfrak{A}p^{n+1}+\mathfrak{B}q^{n+1}$$

und ferner:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\frac{B^2-\alpha AB+\beta A^2}{4\beta-\alpha^2}.$$

§ 227.

Hieraus lässt sich ein Verfahren ableiten, um jedes Glied nur aus einem einzigen vorhergehenden zu bestimmen, während sonst dazu nach dem Fortschreitungsgesetz zwei solche erforderlich sind. Da nämlich

$$P=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n\quad\text{und}\quad Q=\mathfrak{A}p\cdot p^n+\mathfrak{B}q\cdot q^n$$

ist, so wird:

$$Pq-Q=\mathfrak{A}(q-p)p^n\quad\text{und}\quad Pp-Q=\mathfrak{B}(p-q)q^n,$$

und wenn man beide Ausdrücke mit einander multiplicirt:

$$P^2pq-(p+q)PQ+Q^2+\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)^2p^nq^n=0.$$

Nun ist aber:

$$p+q=\alpha;\ pq=\beta;\ (p-q)^2=(p+q)^2-4pq=\alpha^2-4\beta;\ p^nq^n=\beta^n.$$

Substituirt man demnach diese Werte, so erhält man:

$$\beta P^2-\alpha PQ+Q^2=(\beta A^2-\alpha AB+B^2)\beta^n$$

oder

$$\frac{\beta P^2-\alpha PQ+Q^2}{\beta A^2-\alpha AB+B^2}=\beta^n.$$

Diese Formel drückt eine bemerkenswerte Eigenschaft derjenigen rekurrenten Reihen aus, bei denen sich jedes Glied aus den beiden vorhergehenden bestimmt. Kennt man nun irgend ein Glied P, so ist das folgende:

$$Q=\frac{1}{2}\alpha P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2-\beta\right)P^2+(B^2-\alpha AB+\beta A^2)\beta^n},$$

und dieser Ausdruck ist, obwohl er scheinbar von irrationaler Form ist, dennoch stets rational, da irrationale Glieder in der Reihe nicht vorkommen.

§ 228.

Man kann ferner auch aus je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern Pz^n und Qz^{n+1} das viel weiter von ihnen abstehende Glied Xz^{2n} leicht finden. Setzt man nämlich:

$$X=fP^2+gPQ-h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n,$$

so erhält man, da

$$\begin{aligned}P&=\mathfrak{A}p^n&&+\mathfrak{B}q^n\\ Q&=\mathfrak{A}p^{n+1}&&+\mathfrak{B}q^{n+1}\\ X&=\mathfrak{A}p^{2n}&&+\mathfrak{B}q^{2n}\end{aligned}$$

ist:

$$fP^2 = f\mathfrak{A}^2 p^{2n} + f\mathfrak{B}^2 q^{2n} + 2f\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n$$
$$gPQ = g\mathfrak{A}^2 p\cdot p^{2n} + g\mathfrak{B}^2 q\cdot q^{2n} + g\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha\beta^n$$
$$-h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n = \qquad -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n,$$

und da die Summe dieser drei Gleichungen mit der Gleichung:

$$X = \mathfrak{A}P^{2n} + \mathfrak{B}Q^{2n}$$

übereinstimmen muss, so folgt:

$$f + gp = \frac{1}{\mathfrak{A}}$$
$$f + gq = \frac{1}{\mathfrak{B}}$$
$$h = 2f + g\alpha.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$g = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)};\quad f = \frac{\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}.$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\alpha A - 2B}{p-q},\quad \mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q = \frac{\alpha B - 2\beta A}{p-q};$$

folglich:

$$f = \frac{\alpha B - 2\beta A}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 - 4\beta)},\quad g = \frac{\alpha A - 2B}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 - 4\beta)},$$

oder:

$$f = \frac{2\beta A - \alpha B}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}$$
$$g = \frac{2B - \alpha A}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}$$
$$h = \frac{(4\beta - \alpha^2)A}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

Es wird somit:

$$X = \frac{(2\beta A - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2} - A\beta^n.$$

Auf eine ähnliche Art findet man:

$$X = \frac{\big(\alpha\beta A - (\alpha^2 - 2\beta)B\big)P^2 + (2B - \alpha A)Q^2}{\alpha(B^2 - \alpha AB + \beta A^2)} - \frac{2B\beta^n}{\alpha},$$

und wenn man hieraus β^n eliminirt:

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQ^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

§ 229.

Schreibt man auch noch die folgenden Glieder der Reihe hin, also:

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \cdots + Xz^{2n} + Yz^{2n+1} + Zz^{2n+2} + \cdots,$$

so ist auf dieselbe Weise wie vorher:

$$Z = \frac{(\beta A - \alpha B)Q^2 + 2BQR - AR^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2},$$

oder, da

$$R = \alpha Q - \beta P$$

ist,

$$Z = \frac{-\beta^2 AP^2 + 2\beta(\alpha A - B)PQ + \big(\alpha B - (\alpha^2 - \beta)A\big)Q^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

Nun ist aber:

$$Z = \alpha Y - \beta X,\ \text{also}\ Y = \frac{Z + \beta X}{\alpha};$$

folglich:

$$Y = \frac{-\beta BP^2 + 2\beta APQ + (B - \alpha A)Q^2}{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}.$$

So kann man ferner aus X und Y auf ähnliche Art die Coefficienten der Potenzen z^{4n} und z^{4n+1}, aus diesen wieder die von z^{8n} und z^{8n+1} u. s. w. bestimmen.

Beispiel.

Ist die rekurrente Reihe:

$$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$$

gegeben, in welcher irgend ein Coefficient gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist, so ist der Nenner des sie erzeugenden Bruches $1 - z - z^2$. Es ist daher:

$$\alpha = 1,\ \beta = -1\ \text{und}\ A = 1,\ B = 3,$$

folglich:

$$B^2 - \alpha AB + \beta A^2 = 5.$$

Hieraus wird zunächst:

$$Q = \frac{P + \sqrt{5P^2 + 20(-1)^n}}{2} = \frac{P + \sqrt{5P^2 \pm 20}}{2},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist z. B. $n = 4$, also $P = 11$, so ist:

$$Q = \frac{11 + \sqrt{5 \cdot 121 + 20}}{2} = \frac{11 + 25}{2} = 18.$$

Ist ferner X der Coefficient von z^{2n}, so wird:

$$X = \frac{-4P^2 + 6PQ - Q^2}{5},$$

folglich der Coefficient von z^8 gleich:

$$\frac{-4 \cdot 121 + 6 \cdot 198 - 324}{5} = 76.$$

Da aber

$$Q = \frac{P + \sqrt{5P^2 \pm 20}}{2}$$

ist, so wird:

$$Q^2 = \frac{3P^2 \pm 10 + P\sqrt{5P^2 \pm 20}}{2},$$

und daher:

$$X = \frac{-P^2 \mp 2 + P\sqrt{5P^2 \pm 20}}{2}.$$

Man findet demnach aus irgend einem Gliede Pz^n der Reihe die beiden Glieder:

$$\frac{P + \sqrt{5P^2 \pm 20}}{2} z^{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{-P^2 \mp 2 + P\sqrt{5P^2 \pm 20}}{2} z^{2n}.$$

§ 230.

In ähnlicher Weise kann bei denjenigen rekurrenten Reihen, bei welchen sich jedes Glied aus den drei vorhergehenden bestimmt, jedes Glied auch bloss aus den beiden vorhergehenden gefunden werden.

Ist nämlich die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \cdots$$

gegeben, deren Beziehungsskala α, $-\beta$, $+\gamma$ sei, und die somit aus einem Bruche mit dem Nenner $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3$ entspringt, und drückt man P, Q, R in derselben Weise durch die Factoren dieses Nenners, welche $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$ seien, aus, so wird:

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n$$
$$Q = \mathfrak{A}pp^n + \mathfrak{B}qq^n + \mathfrak{C}rr^n$$
$$R = \mathfrak{A}p^2p^n + \mathfrak{B}q^2q^n + \mathfrak{C}r^2r^n.$$

Da nun

$$p + q + r = \alpha, \quad pq + pr + qr = \beta \text{ und } pqr = \gamma$$

ist, so erhält man folgende Gleichung:

$$R^3 - (2\alpha Q - \beta P)R^2 + \left((\alpha^2 + \beta)Q^2 - (\alpha\beta + 3\gamma)PQ + \alpha\gamma P^2\right)R$$
$$- \left((\alpha\beta - \gamma)Q^3 - (\alpha\gamma + \beta^2)Q^2P + 2\beta\gamma P^2Q - \gamma^2P^3\right)$$
$$= \Big\{C^3 - (2\alpha B - \beta A)C^2 + \left((\alpha^2 + \beta)B^2 - (\alpha\beta + 3\gamma)AB + \alpha\gamma A^2\right)C$$
$$- \left((\alpha\beta - \gamma)B^3 - (\alpha\gamma + \beta^2)AB^2 + 2\beta\gamma A^2B - \gamma^2A^3\right)\Big\} \cdot \gamma^n.$$

Es wird daher der Coefficient R aus den beiden vorhergehenden P und Q durch Auflösung einer kubischen Gleichung gefunden.

§ 231.

Nachdem wir die allgemeinen Glieder der rekurrenten Reihen betrachtet haben, müssen wir nun noch ein Verfahren aufsuchen, um die Summen solcher Reihen zu bestimmen. Da nun offenbar die Summe einer rekurrenten, ins Unendliche fortschreitenden Reihe gleich dem Bruche ist, aus dem sie entspringt, und da ferner der Nenner dieses Bruches sich unmittelbar aus dem Fortschreitungsgesetze selbst ergiebt, so haben wir nur noch den Zähler desselben zu ermitteln. Ist also die Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \cdots$$

gegeben, und liefert das Fortschreitungsgesetz derselben den Nenner:

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4,$$

so nehme man an, dass der Bruch, welcher der ins Unendliche fortgesetzten Reihe gleich ist, der folgende sei:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

Da durch Entwicklung desselben wiederum die gegebene Reihe hervorgehen muss, so erhält man durch Vergleichung beider:

$$a = A$$
$$b = B - \alpha A$$
$$c = C - \alpha B + \beta A$$
$$d = D - \alpha C + \beta B - \gamma A.$$

Demnach ist die gesuchte Summe:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

§ 232.

Hiernach ist auch leicht ersichtlich, wie man die Summe einer rekurrenten Reihe finden kann, wenn man dieselbe nur bis zu einem bestimmten Gliede fortsetzt. Soll z. B. die Summe der soeben angeführten, aber nur bis zum Gliede Pz^n fortgesetzten Reihe gefunden werden, so setze man:

$$s=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots+Pz^n.$$

Da nun die Summe der sich ins Unendliche erstreckenden Reihe bekannt ist, so braucht man nur die Summe der unendlich vielen auf Pz^n noch folgenden Glieder zu suchen, und da die Reihe derselben durch z^{n+1} dividirt wiederum eine rekurrente Reihe von derselben Beschaffenheit wie die gegebene darstellt, so erhält man, wenn man

$$t=Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+\cdots$$

setzt:

$$t=\frac{Qz^{n+1}+(R-\alpha Q)z^{n+2}+(S-\alpha R+\beta Q)z^{n+3}+(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

Es ist somit die gesuchte Summe:

$$s=\frac{A+(B-\alpha A)z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}$$
$$-\frac{Qz^{n+1}+(R-\alpha Q)z^{n+2}+(S-\alpha R+\beta Q)z^{n+3}+(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

§ 233.

Ist also z. B. die Beziehungsskala zweigliedrig und gleich $(\alpha, -\beta)$, so ist die Summe der Reihe:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Pz^n,$$

welche aus dem Bruche:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z}{1-\alpha z+\beta z^2}$$

entspringt, die folgende:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}-(R-\alpha Q)z^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2},$$

und dieser Ausdruck ist, da nach der Beschaffenheit der Reihe $R=\alpha Q-\beta P$ sein soll, gleich:

$$\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}+\beta Pz^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2}.$$

Beispiel.

Ist die Reihe:

$$1+3z+4z^2+7z^3+\cdots+Pz^n$$

gegeben, so ist:

$$\alpha=1,\ \beta=-1,\ A=1,\ B=3,$$

und demnach ihre Summe gleich:

$$\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-z^2}.$$

Setzt man aber darin $z=1$, so wird die Summe der Reihe:

$$1+3+4+7+11+\cdots+P=P+Q-3.$$

Es ist daher die Summe des letzten und des darauffolgenden Gliedes um 3 grösser als die Summe der ganzen Reihe. Da aber:

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}$$

ist, so ist die Summe der Reihe:

$$1+3+4+7+11+\cdots+P=\frac{3P-6+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

so dass sich dieselbe ganz allein aus dem letzten Gliede bestimmt.

14. Capitel.

Von der Vervielfachung und Teilung der Winkel.

§ 234.

Es bezeichne z einen Winkel oder einen Bogen eines Kreises vom Radius 1, ferner x seinen Sinus, y seinen Cosinus und t seine Tangente. Dann ist:

$$x^2+y^2=1 \text{ und } t=\frac{x}{y}\cdot$$

Da wir nun oben (§ 129) gesehen haben, dass sowohl die Sinus wie die Cosinus der Winkel $z, 2z, 3z, 4z, 5z, \ldots$ eine rekurrente Reihe bilden, deren Beziehungsskala $(2y, -1)$ ist, so erhalten wir zunächst für die Sinus der genannten Bogen folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin 0z &= 0\\
\sin 1z &= x\\
\sin 2z &= 2xy\\
\sin 3z &= 4xy^2 - x\\
\sin 4z &= 8xy^3 - 4xy\\
\sin 5z &= 16xy^4 - 12xy^2 + x\\
\sin 6z &= 32xy^5 - 32xy^3 + 6xy\\
\sin 7z &= 64xy^6 - 80xy^4 + 24xy^2 - x\\
\sin 8z &= 128xy^7 - 192xy^5 + 80xy^3 - 8xy,
\end{aligned}$$

und hieraus schliesst man allgemein:

$$\sin nz$$

$$=x\left(2^{n-1}y^{n-1}-(n-2)\,2^{n-3}y^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\,2^{n-5}y^{n-5}\right.$$

$$\left.-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\,2^{n-7}y^{n-7}+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,2^{n-9}y^{n-9}-\cdots\right)$$

§ 235.

Setzt man den Bogen $nz=s$, so wird:

$$\sin nz=\sin s=\sin(\pi-s)=\sin(2\pi+s)=\sin(3\pi-s)=\cdots,$$

da alle diese Sinus unter einander gleich sind. Hieraus erhalten wir mehrere Werte für x, nämlich:

$$\sin\frac{s}{n},\ \sin\frac{\pi-s}{n},\ \sin\frac{2\pi+s}{n},\ \sin\frac{3\pi-s}{n},\ \sin\frac{4\pi+s}{n},\ \ldots,$$

welche alle der gefundenen Gleichung genügen. Da sich nun so viele verschiedene Werte für x ergeben, als die Zahl n Einheiten enthält, so sind diese Werte die Wurzeln der gefundenen Gleichung. Man muss also wohl darauf achten, dass man lauter verschiedene Werte für die Wurzeln erhält, und dies wird man erreichen, wenn man von jenen Ausdrücken immer nur einen um den andern nimmt. Nachdem man nun nachträglich die Wurzeln der Gleichung erkannt hat, ergeben sich durch Vergleichung derselben mit den Gliedern der Gleichung sehr bemerkenswerte Eigenschaften. Da man aber zu diesem Zwecke eine Gleichung haben muss, in welcher nur noch x als Unbekannte vorkommt, so muss man für y seinen Wert $\sqrt{1-x^2}$ substituiren, und man wird daher zwei Fälle unterscheiden müssen, je nachdem nämlich n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

§ 236.

Es sei also zunächst n eine ungerade Zahl. Da die Bogen $-z, +z, +3z, +5z, \ldots$ eine Reihe bilden, deren Differenz $2z$ ist, und da der Cosinus dieser Differenz gleich $1-2x^2$ ist, so ist die Beziehungsskala für die Reihe der Sinus gleich $(2-4x^2, -1)$. Es ist daher:

$$\begin{aligned}
\sin(-z) &= -x\\
\sin z &= x\\
\sin 3z &= 3x - 4x^3\\
\sin 5z &= 5x - 20x^3 + 16x^5\\
\sin 7z &= 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7\\
\sin 9z &= 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9,
\end{aligned}$$

folglich allgemein, wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\sin nz = nx - \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$$

Die Wurzeln dieser Gleichung aber sind:

$$\sin z,\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{8\pi}{n}+z\right),\ \ldots$$

und ihre Anzahl ist gleich n.

§ 237.

Es besitzt daher die **Gleichung**:

$$0 = 1 - \frac{nx}{\sin nz} + \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{x^3}{\sin nz} - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{x^5}{\sin nz} + \cdots \pm 2^{n-1}\frac{x^n}{\sin nz}$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Zahl n um eine Einheit kleiner oder grösser ist als ein Vielfaches von 4, die **Factoren**

$$\left(1-\frac{x}{\sin z}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}\right)\cdots,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{n}{\sin nz} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)} + \cdots,$$

worin rechterseits n Glieder vorkommen, und ferner ist das Product aller:

$$\mp\frac{2^{n-1}}{\sin nz} = \frac{1}{\sin z\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\cdots}$$

oder:

$$\sin nz = \mp 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\cdots$$

Endlich ist, weil in der Gleichung das Glied mit der Potenz x^{n-1} nicht vorkommt:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right) + \cdots$$

Erstes Beispiel.

Ist also $n = 3$, so erhält man die Gleichungen:

$$0 = \sin z + \sin(120° + z) + \sin(240° + z),$$

oder:

$$0 = \sin z + \sin(60° - z) - \sin(60° + z).$$

Ferner:

$$\frac{3}{\sin 3z} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin(120° + z)} + \frac{1}{\sin(240° + z)},$$

oder:

$$\frac{3}{\sin 3z} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin(60° - z)} - \frac{1}{\sin(60° + z)}.$$

Endlich:

$$\sin 3z = -4\sin z\sin(120°+z)\sin(240°+z) = 4\sin z\sin(60°-z)\sin(60°+z).$$

Es ist daher, wie bereits oben bemerkt worden:

$$\sin(60°+z) = \sin z + \sin(60°-z)$$
$$3\,\mathrm{cosec}\,3z = \mathrm{cosec}\,z + \mathrm{cosec}(60°-z) - \mathrm{cosec}(60°+z).$$

Zweites Beispiel.

Setzt man $n = 5$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{4}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{6}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{8}{5}\pi + z\right),$$

oder:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right) + \sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right) - \sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right),$$

oder:

$$0 = \sin z + \sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right) - \sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right) - \sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right) + \sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right).$$

Ferner wird:

$$\frac{5}{\sin 5z} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right)}$$

und:

$$\sin 5z = 16\sin z\sin\left(\frac{1}{5}\pi - z\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi + z\right)\sin\left(\frac{2}{5}\pi - z\right)\sin\left(\frac{2}{5}\pi + z\right).$$

Drittes Beispiel.

Setzt man $n = 2m + 1$, so wird:

$$\begin{aligned} 0 = \sin z &+ \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \\ &- \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \\ &+ \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\pm \sin\left(\frac{m}{n}\pi - z\right) \mp \sin\left(\frac{m}{n}\pi + z\right), \end{aligned}$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Die andere Gleichung ist dann:

$$\frac{n}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)}$$
$$-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}$$
$$+\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)}\mp\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right)}.$$

Dieselbe lässt sich bequem auf die Cosekanten übertragen. Drittens endlich ist:

$$\sin nz=2^{2m}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\times$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\times$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)\times$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right).$$

§ 238.

Es sei nunmehr n eine gerade Zahl. Da nun $y=\sqrt{1-x^2}$ und $\cos 2z=1-2x^2$ ist, so ist die Beziehungsscala der Reihe der Sinus ebenso wie vorher gleich $(2-4x^2, -1)$, und es wird:

$$\sin 0z=0$$
$$\sin 2z=2x\sqrt{1-x^2}$$
$$\sin 4z=(4x-8x^3)\sqrt{1-x^2}$$
$$\sin 6z=(6x-32x^3+32x^5)\sqrt{1-x^2}$$
$$\sin 8z=(8x-80x^3+192x^5-128x^7)\sqrt{1-x^2},$$

und allgemein, wenn n eine gerade Zahl bedeutet:

$$\sin nz=\Big(nx-\frac{n(n^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5$$
$$-\frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7+\cdots\pm 2^{n-1}x^{n-1}\Big)\sqrt{1-x^2}.$$

§ 239.

Erhebt man diese Gleichung, um sie rational zu machen, ins Quadrat, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\sin^2 nz=n^2x^2+Px^4+Qx^6+\cdots-2^{2n-2}x^{2n}$$

oder:

$$x^{2n}-\cdots-\frac{n^2}{2^{2n-2}}x^2+\frac{1}{2^{2n-2}}\sin^2 nz=0.$$

Als **Wurzeln** dieser Gleichung hat man sowohl die positiven als die negativen Werte zu nehmen. Dieselben sind also:

$$\pm\sin z,\ \pm\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right),\ \pm\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \pm\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right),\ \pm\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\ldots,$$

wenn man im Ganzen n solcher Ausdrücke nimmt. Da nun das letzte Glied gleich dem Product aus allen diesen Wurzeln ist, so erhält man, indem man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht:

$$\sin nz=\pm 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\cdots$$

Welches Vorzeichen jedesmal das richtige ist, wird aus den besonderen Fällen ersichtlich werden.

Beispiel.

Setzt man für n der Reihe nach die Zahlen $2, 4, 6\ldots$, und nimmt man dabei immer n verschiedene Sinus, so ergiebt sich:

$$\sin 2z=\ \ 2\sin z\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$
$$\sin 4z=\ \ 8\sin z\sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$
$$\sin 6z=\ \ 32\sin z\sin\left(\frac{\pi}{6}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{6}-z\right)$$
$$\sin 8z=128\sin z\sin\left(\frac{\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}-z\right)\times$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{8}-z\right).$$

§ 240.

Es ist also offenbar **allgemein**, wenn n eine **gerade Zahl** ist:

$$\begin{aligned}\sin nz = 2^{n-1} \sin z \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).\end{aligned}$$

Wenn man aber diese **Gleichung** mit der **früheren**, in welcher n eine ungerade Zahl war, vergleicht, so findet zwischen beiden eine so grosse Aehnlichkeit statt, dass man sie **beide in eine zusammenziehen** kann. Es wird daher, mag nun n eine **gerade** oder eine **ungerade** Zahl bedeuten:

$$\begin{aligned}\sin nz = 2^{n-1} \sin z \sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und zwar hat man dieses Product soweit fortzusetzen, bis man so viele Factoren hat, als die Zahl n Einheiten enthält.

§ 241.

Derartige Ausdrücke, welche die **Sinus der Vielfachen** eines **Winkels in der Form von Producten** darstellen, **gewähren nicht nur grossen Nutzen**, wenn es sich darum handelt, die **Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel zu bestimmen**, sondern sie **geben auch noch mehrere Ausdrücke für die Sinus von derselben Art**, wie wir oben § 184 betrachtet haben. Es ist, wenn wir einige derselben zusammenstellen:

$$\sin z = 1 \sin z$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$\sin 3z = 4 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{3} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$\sin 4z = 8 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$

$$\sin 5z = 16 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{5} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{5} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

$$\sin 6z = 32 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{6} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6} - z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

u. s. w.

§ 242.

Da ferner $\frac{\sin 2nz}{\sin nz} = 2 \cos nz$ ist, so lassen sich auch die **Cosinus der Vielfachen eines Winkels** in ähnlicher Weise **als Producte darstellen**, nämlich:

$$\cos z = 1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$\cos 2z = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right)$$

$$\cos 3z = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

$$\cos 4z = 8 \sin\left(\frac{\pi}{8} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} + z\right)$$

$$\cos 5z = 16 \sin\left(\frac{\pi}{10} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{10} + z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10} + z\right) \sin\left(\frac{5\pi}{10} - z\right),$$

und **allgemein**:

$$\begin{aligned}\cos nz = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - z\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2n} - z\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2n} + z\right) \times \\ \sin\left(\frac{5\pi}{2n} - z\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2n} + z\right) \times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wobei das Product so lange fortzusetzen ist, bis die Anzahl der Factoren gleich n ist.

§ 243.

Dieselben Ausdrücke erhält man auch, wenn man die Cosinus der Vielfachen eines Winkels **von vornherein** betrachtet. Ist nämlich $\cos z = y$, so wird:

$$\begin{aligned}\cos 0z &= 1 \\ \cos 1z &= y \\ \cos 2z &= 2y^2 - 1 \\ \cos 3z &= 4y^3 - 3y \\ \cos 4z &= 8y^4 - 8y^2 + 1 \\ \cos 5z &= 16y^5 - 20y^3 + 5y \\ \cos 6z &= 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1 \\ \cos 7z &= 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y,\end{aligned}$$

und allgemein:

$$\cos n\varepsilon = 2^{n-1} y^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} 2^{n-5} y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} 2^{n-7} y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} 2^{n-9} y^{n-8} - \cdots$$

Da nun

$$\cos n\varepsilon = \cos(2\pi - n\varepsilon) = \cos(2\pi + n\varepsilon) = \cos(4\pi \pm n\varepsilon) = \cos(6\pi \pm n\varepsilon) = \cdots$$

ist, so sind die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\cos\varepsilon,\ \cos\left(\frac{2\pi}{n} \pm \varepsilon\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{n} \pm \varepsilon\right),\ \cos\left(\frac{6\pi}{n} \pm \varepsilon\right), \ldots,$$

und zwar sind hieraus alle diejenigen Werte für y herauszusuchen, welche von einander verschieden sind. Solcher verschiedenen Werte giebt es aber immer ebenso viele, als n Einheiten enthält.

§ 244.

Nun ist zunächst klar, dass mit alleiniger Ausnahme des Falles $n=1$ die **Summe** aller dieser Wurzeln stets gleich 0 ist, da in jener Gleichung ein Glied mit y^{n-1} nicht vorkommt. Es ist daher:

$$0 = \cos\varepsilon + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + \varepsilon\right) + \cdots$$

wobei man so viele, dem Werte nach von einander verschiedene Glieder zu nehmen hat, als n Einheiten enthält. Diese Gleichung ist aber von selbst erfüllt, wenn n eine gerade Zahl ist, da alsdann immer zwei gleiche und entgegengesetzte Glieder vorkommen, die einander zerstören. Ziehen wir daher nur ungerade Zahlen n, die 1 ausgeschlossen, in Betracht, so wird, da $\cos v = -\cos(\pi - v)$ ist:

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right)$$

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{5} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \varepsilon\right)$$

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{7} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} + \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7} + \varepsilon\right),$$

und allgemein, wenn n irgend eine ungerade Zahl bedeutet:

$$0 = \cos\varepsilon - \cos\left(\frac{\pi}{n} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{n} - \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{n} + \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} - \varepsilon\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + \varepsilon\right) \cdots$$

Hierin sind immer soviel Glieder zu nehmen, als die Zahl n Einheiten enthält. Ferner muss die Zahl n, wie bereits erwähnt, ungerade und grösser als 1 sein.

§ 245.

Was das **Product** aus allen diesen Wurzeln anlangt, so erhält man dafür verschiedene Ausdrücke, je nachdem n eine ungerade oder eine ungerademal gerade oder eine gerademal gerade Zahl ist. Es sind jedoch alle diese Ausdrücke in dem allgemeinen, im § 242 gefundenen Ausdrucke enthalten, wenn man jeden Sinus in den Cosinus verwandelt. Es ist nämlich:

$$\cos\varepsilon = 1 \cos\varepsilon$$

$$\cos 2\varepsilon = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$$

$$\cos 3\varepsilon = 4\cos\left(\frac{2\pi}{6} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6} - \varepsilon\right)\cos\varepsilon$$

$$\cos 4\varepsilon = 8\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8} - \varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \varepsilon\right)$$

$$\cos 5\varepsilon = 16\cos\left(\frac{4\pi}{10} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{4\pi}{10} - \varepsilon\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10} + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10} - \varepsilon\right)\cos\varepsilon,$$

und allgemein:

$$\cos n\varepsilon = 2^{n-1} \cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi - \varepsilon\right) \times \cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi - \varepsilon\right) \times \cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi + \varepsilon\right)\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi - \varepsilon\right) \times \cos\left(\frac{n-7}{2n}\pi + \varepsilon\right) \cdots\cdots,$$

wobei die Anzahl der Factoren stets gleich n ist.

§ 246.

Ist n eine **ungerade** Zahl und schreibt man die Gleichung in der Form:

$$0 = 1 \mp \frac{ny}{\cos nz} + \cdots;$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine ungerade Zahl von der Form $4m+1$ oder eine von der Form $4m-1$ ist, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos z}$$

$$-\frac{3}{\cos 3z} = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + z\right)}$$

$$+\frac{5}{\cos 5z} = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5} - z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5} + z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5} - z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)};$$

und allgemein, wenn man $n = 2m+1$ setzt:

$$\frac{n}{\cos nz} = \frac{2m+1}{\cos(2m+1)z} = \frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi + z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi - z\right)}$$

$$- \frac{1}{\cos\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right)}$$

$$+ \frac{1}{\cos\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right)}$$

$$- \frac{1}{\cos\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right)} \cdots\cdots\cdots;$$

wobei ebenfalls soviel Glieder zu nehmen sind, als n Einheiten enthält.

§ 247.

Da nun $\frac{1}{\cos v} = \sec v$ ist, so folgen hieraus bemerkenswerte Eigenschaften für die **Sekanten**, nämlich:

$$\sec z = \sec z$$

$$3 \sec 3z = \sec\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \sec\left(\frac{0\pi}{3} + z\right)$$

$$5 \sec 5z = \sec\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) - \sec\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \sec\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \sec\left(\frac{0\pi}{5} + z\right)$$

$$7 \sec 7z = \sec\left(\frac{3\pi}{7} + z\right) + \sec\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \sec\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - \sec\left(\frac{2\pi}{7} - z\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{\pi}{7} + z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \sec\left(\frac{0\pi}{7} + z\right)$$

und allgemein, wenn $n = 2m+1$ gesetzt wird:

$$n \sec nz = \sec\left(\frac{m}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m}{n}\pi - z\right)$$

$$- \sec\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right) - \sec\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right)$$

$$- \sec\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right) - \sec\left(\frac{m-3}{n}\pi - z\right)$$

$$+ \sec\left(\frac{m-4}{n}\pi + z\right) + \cdots\cdots\cdots \pm \sec z.$$

§ 248.

Ebenso ergeben sich aus § 237 für die **Cosekanten** die Formeln:

$$\operatorname{cosec} z = \operatorname{cosec} z$$

$$3 \operatorname{cosec} 3z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$5 \operatorname{cosec} 5z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right)$$

$$7 \operatorname{cosec} 7z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{7} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7} - z\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{7} + z\right),$$

und allgemein, wenn man $n = 2m+1$ setzt:

$$n \operatorname{cosec} nz = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n} + z\right)$$

$$- \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)$$

$$+ \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mp \operatorname{cosec}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \pm \operatorname{cosec}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right),$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§ 249.

Wie wir oben in § 133 gesehen haben, ist:

$$\cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz = (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n,$$

folglich:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

und daher:

$$\operatorname{tang} nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n\sqrt{-1} + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n\sqrt{-1}}.$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = t,$$

so wird:

$$\operatorname{tang} nz = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^n - (1 - t\sqrt{-1})^n}{(1 + t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} + (1 - t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1}},$$

und hieraus ergeben sich für die **Tangenten der Vielfachen** eines Winkels die folgenden Formeln:

$$\operatorname{tang} z = t$$

$$\operatorname{tang} 2z = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\operatorname{tang} 3z = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$\operatorname{tang} 4z = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$\operatorname{tang} 5z = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4},$$

und allgemein:

$$\operatorname{tang} nz = \frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \cdots}{1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}t^4 - \cdots}$$

Da nun:

$$\operatorname{tang}(nz) = \operatorname{tang}(\pi + nz) = \operatorname{tang}(2\pi + nz) = \operatorname{tang}(3\pi + nz) = \cdots$$

ist, so sind die Werte von t, welche der vorstehenden Gleichung Genüge leisten, die folgenden:

$$\operatorname{tang} z,\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n} + z\right),\ \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right),\ \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right), \cdots$$

Die Anzahl derselben ist stets gleich n.

§ 250.

Lässt man obige Gleichung mit 1 beginnen, so wird dieselbe:

$$0 = 1 - \frac{n}{\operatorname{tang} nz}t - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \operatorname{tang} nz}t^3 + \cdots$$

Vergleicht man nun die Coefficienten dieser Gleichung mit ihren Wurzeln, so wird:

$$n\cot nz = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{n} + z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) + \cot\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \cdots + \cot\left(\frac{n-1}{n}\pi + z\right).$$

Ferner ist die Summe der Quadrate aller dieser **Cotangenten** gleich $\frac{n^2}{\sin^2 nz} - n$, und ebenso lassen sich auch die Summen der höheren Potenzen bestimmen. Setzt man aber für n bestimmte Zahlen, so erhält man:

$$\cot z = \cot z$$

$$2\cot 2z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$$

$$3\cot 3z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{3} + z\right)$$

$$4\cot 4z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{4} + z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{4} + z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{4} + z\right)$$

$$5\cot 5z = \cot z + \cot\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{5} + z\right) + \cot\left(\frac{4\pi}{5} + z\right).$$

§ 251.

Weil aber $\cot v = -\cot(\pi - v)$ ist, so gehen diese Formeln über in:

$$\cot z = \cot z$$

$$2\cot 2z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$3\cot 3z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$4\cot 4z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4} + z\right) - \cot\left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$

$$5\cot 5z = \cot z - \cot\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \cot\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \cot\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} n \cot nz = \cot z &- \cot\Big(\frac{\pi}{n} - z\Big) + \cot\Big(\frac{\pi}{n} + z\Big) \\ &- \cot\Big(\frac{2\pi}{n} - z\Big) + \cot\Big(\frac{2\pi}{n} + z\Big) \\ &- \cot\Big(\frac{3\pi}{n} - z\Big) + \cot\Big(\frac{3\pi}{n} + z\Big) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wobei die Reihe rechterseits so lange fortzusetzen ist, bis die Anzahl ihrer Glieder gleich n ist.

§ 252.

Lässt man aber die gefundene Gleichung mit der höchsten Potenz von t beginnen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Es sei zunächst n eine ungerade Zahl, also $n = 2m + 1$, so ist:

$$t - \mathrm{tang}\, z = 0$$
$$t^3 - 3t^2 \,\mathrm{tang}\, 3z - 3t + \mathrm{tang}\, 3z = 0$$
$$t^5 - 5t^4 \,\mathrm{tang}\, 5z - 10t^3 + 10t^2 \,\mathrm{tang}\, 5z + 5t - \mathrm{tang}\, 5z = 0,$$

und allgemein:

$$t^n - nt^{n-1} \,\mathrm{tang}\, nz - \cdots \mp \mathrm{tang}\, nz = 0.$$

Hierin gilt das obere Zeichen, wenn m eine gerade, das untere dagegen, wenn m eine ungerade Zahl ist. Man erhält daher aus dem Coefficienten des zweiten Gliedes:

$$\mathrm{tang}\, z = \mathrm{tang}\, z$$
$$3\,\mathrm{tang}\, 3z = \mathrm{tang}\, z + \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{3} + z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{3} + z\Big)$$
$$5\,\mathrm{tang}\, 5z = \mathrm{tang}\, z + \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{5} + z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{5} + z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{3\pi}{5} + z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\ldots$$

u. s. w.

§ 253.

Da nun $\mathrm{tang}\, v = -\mathrm{tang}(\pi - v)$ ist, so lassen sich die Winkel, welche grösser als ein Rechter sind, auf solche zurückführen, welche kleiner als ein Rechter sind. Es ist demnach:

$$\mathrm{tang}\, z = \mathrm{tang}\, z$$
$$3\,\mathrm{tang}\, 3z = \mathrm{tang}\, z - \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{3} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{3} + z\Big)$$
$$5\,\mathrm{tang}\, 5z = \mathrm{tang}\, z - \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{5} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{5} + z\Big) - \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{5} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{5}\ldots$$
$$\begin{aligned} 7\,\mathrm{tang}\, 7z = \mathrm{tang}\, z &- \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{7} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{7} + z\Big) - \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{7} - z\Big) \\ &+ \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{7} + z\Big) - \mathrm{tang}\Big(\frac{3\pi}{7} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{3\pi}{7}\ldots \end{aligned}$$

und allgemein, wenn $n = 2m + 1$ ist:

$$\begin{aligned} n \,\mathrm{tang}\, nz = \mathrm{tang}\, z &- \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{n} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{n} + z\Big) \\ &- \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{n} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{n} + z\Big) \\ &- \mathrm{tang}\Big(\frac{3\pi}{n} - z\Big) + \ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- \mathrm{tang}\Big(\frac{m\pi}{n} - z\Big) + \mathrm{tang}\Big(\frac{m\pi}{n} + z\Big). \end{aligned}$$

§ 254.

Ferner aber wird das **Product** aller dieser **Tangenten** gleich $\mathrm{tang}\, nz$, weil die Zweideutigkeit in Bezug auf das Vorzeichen wegen der abwechselnd geraden und ungeraden Anzahl der negativen Zeichen wegfällt. Es wird daher:

$$\mathrm{tang}\, z = \mathrm{tang}\, z$$
$$\mathrm{tang}\, 3z = \mathrm{tang}\, z \,\mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{3} - z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{3} + z\Big)$$
$$\mathrm{tang}\, 5z = \mathrm{tang}\, z \,\mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{5} - z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{5} + z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{5} - z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{5} + z\Big),$$

und allgemein, wenn $n = 2m + 1$ ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{tang}\, nz = \mathrm{tang}\, z \,&\mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{n} - z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{\pi}{n} + z\Big) \times \\ &\mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{n} - z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{2\pi}{n} + z\Big) \times \\ &\mathrm{tang}\Big(\frac{3\pi}{n} - z\Big) \ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathrm{tang}\Big(\frac{m\pi}{n} - z\Big) \,\mathrm{tang}\Big(\frac{m\pi}{n} + z\Big). \end{aligned}$$

§ 255.

Ist jetzt n eine gerade Zahl, und lässt man die Gleichung mit der höchsten Potenz anfangen, so ist:

$$t^2 + 2t \cot 2z - 1 = 0$$
$$t^4 + 4t^3 \cot 4z - 6t^2 - 4t \cot 4z + 1 = 0,$$

und allgemein, wenn $n = 2m$ ist:

$$t^n + nt^{n-1} \cot nz - \cdots \mp 1 = 0,$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Vergleicht man also die Wurzeln mit dem Coefficienten des zweiten Gliedes, so erhält man:

$$-2\cot 2z = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$$

$$-4\cot 4z = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)$$

$$-6\cot 6z = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{6}+z\right)$$
$$+ \operatorname{tang}\left(\frac{4\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{5\pi}{6}+z\right)$$

u. s. w.

§ 256.

Da $\operatorname{tang} v = -\operatorname{tang}(\pi - v)$ ist, so ergeben sich hieraus die folgenden Gleichungen:

$$2\cot 2z = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$4\cot 4z = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{4}-z\right)$$

$$6\cot 6z = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)$$
$$- \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{6}-z\right),$$

und allgemein, wenn $n = 2m$ ist:

$$n\cot nz = -\operatorname{tang} z + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{n}+z\right)$$
$$+ \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)$$
$$+ \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + \operatorname{tang}\left(\frac{m\pi}{n}-z\right).$$

§ 257.

Bei dieser Form fällt wiederum die Zweideutigkeit des Products aller Wurzeln weg, und es wird somit:

$$1 = \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

$$1 = \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{4}-z\right)$$

$$1 = \operatorname{tang} z \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}-z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}-z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{6}-z\right)$$

u. s. w.

Der wahre Grund dieser Gleichungen fällt aber sofort von selbst in die Augen, da in ihnen stets je zwei Winkel vorkommen, die einander zu einem rechten Winkel ergänzen. Da nun das Product der Tangenten zweier solcher Winkel gleich 1 ist, so muss auch das Product aller gleich 1 sein.

§ 258.

Da die **Sinus** und **Cosinus** von **Winkeln**, welche in einer **arithmetischen** Progression fortgehen, eine rekurrente Reihe bilden, so kann man auch nach dem vorhergehenden Capitel die **Summe** von beliebig vielen solcher Sinus und Cosinus bestimmen. Sind die in arithmetischer Progression fortschreitenden Winkel die folgenden:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ a+5b,\ \ldots,$$

und soll zunächst die Summe der Sinus dieser unendlich vielen Winkel gefunden werden, so setze man:

$$s = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots$$

Da diese Reihe eine rekurrente und ihre Beziehungsskala gleich $(2\cos b, -1)$ ist, so entspringt dieselbe aus der Entwicklung eines Bruches mit dem Nenner $1 - 2z\cos b + z^2$, wenn in derselben $z = 1$ gesetzt wird. Der Bruch selbst aber ist:

$$\frac{\sin a + z(\sin(a+b) - 2\sin a\cos b)}{1 - 2z\cos b + z^2},$$

und es wird somit, wenn man $z = 1$ setzt:

$$s = \frac{\sin a + \sin(a+b) - 2\sin a\cos b}{2 - 2\cos b} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{2(1-\cos b)},$$

weil

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

ist. Da aber

$$\sin f - \sin g = 2\cos\frac{f+g}{2}\sin\frac{f-g}{2}$$

ist, so wird:

$$\sin a - \sin(a-b) = 2\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)\sin\frac{b}{2};$$

ferner ist:

$$1 - \cos b = 2\sin^2\frac{b}{2},$$

folglich:

$$s = \frac{\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

§ 259.

Hiernach kann nun auch die Summe einer endlichen Anzahl solcher Sinus, deren Bogen in arithmetischer Progression fortschreiten, angegeben werden. Es möge z. B. die Summe der Reihe:

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

gesucht werden. Da die Summe dieser Reihe, wenn man sich dieselbe ins Unendliche fortgesetzt denkt, bekannt, nämlich gleich $\dfrac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$ ist, so betrachte man die unendlich vielen Glieder, welche auf jenes letzte Glied folgen, nämlich:

$$\sin\left(a+(n+1)b\right) + \sin\left(a+(n+2)b\right) + \sin\left(a+(n+3)b\right) + \cdots$$

Da sich die Summe dieser Reihe gleich $\dfrac{\cos\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}$ ergiebt, so erhält man, wenn man diesen Ausdruck von dem früheren abzieht, die gesuchte Summe. Es wird daher, wenn

$$s = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots + \sin(a+nb)$$

gesetzt wird:

$$s = \frac{\cos(a-\frac{1}{2}b) - \cos\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§ 260.

Ebenso erhält man, wenn man die Summe der **Cosinus** betrachtet und

$$s = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots \text{ in inf.}$$

setzt:

$$s = \frac{\cos a + z\left(\cos(a+b) - 2\cos a\cos b\right)}{1 - 2z\cos b + z^2} \text{ für } z = 1.$$

Da nun

$$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

ist, so wird:

$$s = \frac{\cos a - \cos(a-b)}{2(1-\cos b)}.$$

Ferner ist aber:

$\cos f - \cos g = 2\sin\dfrac{f+g}{2}\sin\dfrac{g-f}{2}$, also $\cos a - \cos(a-b) = -2\sin(a-\dfrac{1}{2}b)\sin\dfrac{1}{2}b$

und:

$$1 - \cos b = 2\sin^2\frac{b}{2};$$

folglich:

$$s = -\frac{\sin(a-\frac{1}{2}b)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

Ebenso findet man die Summe der Reihe

$$\cos\left(a+(n+1)b\right) + \cos\left(a+(n+2)b\right) + \cos\left(a+(n+3)b\right) + \cdots \text{ in inf.}$$

gleich:

$$-\frac{\sin\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

Zieht man demnach diesen Ausdruck von dem vorhergehenden ab, so bleibt die Summe der Reihe:

$$s = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots + \cos(a+nb)$$

übrig, und zwar wird dieselbe:

$$s = \frac{-\sin(a-\frac{1}{2}b) + \sin\left(a+(n+\frac{1}{2})b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\cos(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§ 261.

Mittelst der angegebenen Sätze lassen sich noch manche andere Fragen, die Sinus und Tangenten betreffend, erledigen; z. B. wie man die Summen der Quadrate oder der höheren Potenzen der Sinus oder der Tangenten findet. Indessen wollen wir uns hierbei nicht länger aufhalten, da sich dies aus den übrigen Coefficienten der obigen Gleichungen in ähnlicher Weise ergiebt.

In Bezug auf diese letzteren Summationen bemerken wir daher nur, dass sich eine jede Potenz des Sinus und Cosinus durch die einzelnen Sinus und Cosinus ausdrücken lässt. Um dies klarzustellen, wollen wir darauf noch kurz eingehen.

§ 262.

Wir führen hierzu aus dem Vorhergehenden (§ 130) die folgenden Hülfssätze an:

$$\begin{aligned}
2\sin a\sin z &= \cos(a-z) - \cos(a+z)\\
2\cos a\sin z &= \sin(a+z) - \sin(a-z)\\
2\sin a\cos z &= \sin(a+z) + \sin(a-z)\\
2\cos a\cos z &= \cos(a-z) + \cos(a+z).
\end{aligned}$$

Hieraus findet man zunächst die **Potenzen der Sinus**:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin z\\
2\sin^2 z &= 1-\cos 2z\\
4\sin^3 z &= 3\sin z-\sin 3z\\
8\sin^4 z &= 3-4\cos 2z+\cos 4z\\
16\sin^5 z &= 10\sin z-5\sin 3z+\sin 5z\\
32\sin^6 z &= 10-15\cos 2z+6\cos 4z-\cos 6z\\
64\sin^7 z &= 35\sin z-21\sin 3z+7\sin 5z-\sin 7z\\
128\sin^8 z &= 35-56\cos 2z+28\cos 4z-8\cos 6z+\cos 8z\\
256\sin^9 z &= 126\sin z-84\sin 3z+36\sin 5z-9\sin 7z+\sin 9z
\end{aligned}$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem hier die Coefficienten fortschreiten, stimmt mit demjenigen überein, welches die Coefficienten der Potenz eines Binoms befolgen; nur ist das bei den geraden Potenzen der Sinus vorhandene absolute Glied gleich der Hälfte des entsprechenden Coefficienten in der Entwicklung derselben Potenz des Binoms.

§ 263.

Auf ebendieselbe Weise lassen sich die **Potenzen der Cosinus** finden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos z\\
2\cos^2 z &= 1+\cos 2z\\
4\cos^3 z &= 3\cos z+\cos 3z\\
8\cos^4 z &= 3+4\cos 2z+\cos 4z\\
16\cos^5 z &= 10\cos z+5\cos 3z+\cos 5z\\
32\cos^6 z &= 10+15\cos 2z+6\cos 4z+\cos 6z\\
64\cos^7 z &= 35\cos z+21\cos 3z+7\cos 5z+\cos 7z
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hier ist in Bezug auf das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortschreiten, dasselbe zu sagen, wie bei den Sinus.

15. Capitel.

Von den Reihen, welche aus der Entwicklung von Producten entspringen.

§ 264.

Ist ein Product gegeben von der Form:

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)(1+\zeta z)\cdots,$$

in welchem die Anzahl der Factoren sowohl endlich als unendlich gross sein kann, und giebt dasselbe, wenn die Multiplikation wirklich ausgeführt wird, die Reihe:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+\cdots,$$

so bestimmen sich offenbar die Coefficienten $A, B, C, D, E\ldots$ derselben aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\ldots$ derart, dass

$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\cdots=$ der Summe der einzelnen Zahlen,
$B=$ der Summe der Producte aus je zweien,
$C=$ der Summe der Producte aus je dreien,
$D=$ der Summe der Producte aus je vieren,
$E=$ der Summe der Producte aus je fünfen von diesen Zahlen u. s. w.

ist, bis man zu dem Producte aus allen gekommen ist. Man darf aber hierbei **keine** der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ **mit sich selbst** verbinden.

§ 265.

Setzt man also $z=1$, so ist das Product:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)\ldots$$

gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller der Zahlen, welche aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\ldots$ dadurch gebildet werden können, dass man dieselben zunächst einzeln nimmt und darauf je zwei oder mehrere von einander **verschiedene** mit einander multiplicirt. Ergiebt sich dabei eine und dieselbe Zahl auf zwei oder mehrere Arten, so muss dieselbe auch in der in Rede stehenden Zahlenreihe zwei- oder mehreremal vorkommen.

§ 266.

Setzt man $z = -1$, so ist das Product:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\cdots$$

wiederum gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller der Zahlen, welche aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ dadurch gebildet werden können, dass man dieselben zunächst einzeln nimmt und sodann je zwei oder mehrere von einander verschiedene mit einander multiplicirt. Im Gegensatz zu dem Früheren findet aber hier der Unterschied statt, dass sowohl die einzelnen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$, als auch die Producte aus je dreien, fünfen, überhaupt aus einer **ungeraden** Anzahl derselben **negativ**, dagegen die Producte aus je zweien, vieren, sechsen und überhaupt aus einer **geraden** Anzahl von ihnen **positiv** genommen werden müssen.

§ 267.

Schreibt man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die sämtlichen **Primzahlen** 2, 3, 5, 7, 11, 13 ..., so wird das Product:

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)\cdots = P$$

gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller Zahlen, die entweder selbst Primzahlen sind oder durch Multiplikation aus verschiedenen Primzahlen entstanden sind. Es ist also:

$$P = 1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+\cdots$$

In dieser Reihe kommen alle natürlichen Zahlen vor mit Ausnahme der Potenzen und derer, die durch irgend eine Potenz teilbar sind. Es fehlen darin also die Zahlen 4, 8, 9, 12, 16, 18 ..., da dieselben teils Potenzen, wie 4, 8, 9, 16 ..., teils durch Potenzen teilbar sind, wie 12, 18 ...

§ 268.

Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man an Stelle von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ irgend welche **Potenzen der Primzahlen** setzt. Macht man nämlich:

$$P = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so wird nach Ausführung der Multiplikation:

$$P = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots$$

und in diesen Brüchen treten **alle** Zahlen auf mit **Ausnahme** derer, die entweder selbst Potenzen, oder durch irgend eine Potenz teilbar sind. Denn da alle ganzen Zahlen entweder Primzahlen oder aus Primzahlen durch Multiplikation zusammengesetzt sind, so sind hier nur diejenigen Zahlen auszuschliessen, zu deren Bildung eine und dieselbe Primzahl zwei oder mehreremal gebraucht wird.

§ 269.

Nimmt man, wie im § 266, die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ negativ an, und setzt man:

$$P = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so ist:

$$P = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}-\cdots,$$

wobei ebenso wie vorher **die sämtlichen** Zahlen mit **Ausnahme** der Potenzen und der durch Potenzen teilbaren auftreten. Es haben jedoch die Primzahlen selbst, ferner die aus je drei, fünf und überhaupt aus einer ungeraden Anzahl derselben zusammengesetzten Zahlen das negative, dagegen die aus je zwei, vier, sechs und überhaupt aus einer geraden Anzahl von Primzahlen gebildeten Zahlen das positive Vorzeichen. So kommt z. B. in dieser Reihe das Glied $\frac{1}{30^n}$ vor, weil $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ist und somit keine Potenz enthält. Dieses Glied $\frac{1}{30^n}$ hat aber das negative Vorzeichen, weil 30 das Product dreier Primzahlen ist.

§ 270.

Betrachten wir jetzt den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z)\ldots},$$

welcher nach wirklicher Ausführung der Division die Reihe:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \ldots$$

ergeben möge, so sind offenbar die Coefficienten $A, B, C, D, E \ldots$ derart aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ zusammengesetzt, dass

$A =$ der Summe dieser Zahlen einzeln genommen,
$B =$ der Summe der Producte aus je zweien,
$C =$ der Summe der Producte aus je dreien,
$D =$ der Summe der Producte aus je vieren von ihnen u. s. w. ist,

jedoch so, dass bei der Bildung dieser Summen diejenigen Producte, welche zwei oder mehrere gleiche Factoren enthalten, nicht ausgeschlossen werden dürfen.

§ 271.

Setzt man daher $z = 1$, so wird der Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\ldots}$$

gleich der Einheit vermehrt um die Reihe aller Zahlen, welche aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ dadurch gebildet werden können, dass man zunächst diese einzeln nimmt und sodann zwei oder mehrere mit einander multiplicirt, wobei auch gleiche Factoren nicht auszuschliessen sind.

Es unterscheidet sich demnach die frühere, im § 265 erhaltene Zahlenreihe von der jetzigen dadurch, dass in jener nur von einander verschiedene Factoren zur Bildung einer Zahl genommen werden durften, während in dieser ein und derselbe Factor zwei- oder mehreremal in einer Zahl vorkommen kann.

Es treten also hier überhaupt alle Zahlen auf, welche aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ durch Multiplikation entstehen können.

§ 272.

Es besteht daher die Reihe immer aus unendlich vielen Gliedern, mag nun die Anzahl der Factoren eine unendlich grosse oder eine endliche Zahl sein. So ist:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots,$$

in welcher Reihe alle Zahlen vorkommen, welche aus der 2 durch wiederholte Multiplikation entstehen, welche somit Potenzen von 2 sind. Ferner ist:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots,$$

und hierin kommen nur alle diejenigen Zahlen vor, welche durch Multiplikation aus 2 und 3 entstehen, oder welche nur durch 2 oder 3 teilbar sind.

§ 273.

Setzt man daher für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ alle Brüche, deren Zähler gleich 1 und deren Nenner die einzelnen Primzahlen sind, und macht man:

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

so wird:

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Hierin kommen alle Zahlen vor, welche entweder selbst Primzahlen sind, oder aus diesen durch Multiplikation entstehen. Da nun aber überhaupt alle Zahlen entweder Primzahlen sind oder durch Multiplikation aus den Primzahlen gebildet werden, so müssen hier in den Nennern überhaupt alle ganzen Zahlen auftreten.

§ 274.

Dasselbe ist der Fall, wenn man irgend welche Potenzen der Primzahlen nimmt. Denn setzt man:

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots},$$

so wird:

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

wobei die natürlichen Zahlen ohne jede Ausnahme vorkommen. Wenn man aber in den Factoren den einzelnen Brüchen das positive Vorzeichen giebt, also

$$P = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\cdots}$$

setzt, so wird:

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \cdots$$

Hierbei haben die Primzahlen das negative, die Producte aus zwei gleichen oder verschiedenen Primzahlen aber das positive Vorzeichen.

Ueberhaupt aber sind alle Zahlen, welche aus einer geraden Anzahl von Primfactoren gebildet sind, mit dem Vorzeichen $+$, diejenigen dagegen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren bestehen, mit dem Vorzeichen $-$ versehen. So hat das Glied $\frac{1}{240^n}$ das Vorzeichen $+$, weil $240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ist. Den Grund dieses Gesetzes erkennt man aus § 270, wenn man darin $z = -1$ setzt.

§ 275.

Wenn man das unmittelbar Vorhergehende mit dem Früheren verbindet, so hat man zwei Reihen, deren Product der Einheit gleich ist. Ist nämlich:

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

und

$$Q=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so ist:

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots$$

$$Q=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

und es ist offenbar $PQ=1$.

§ 276.

Setzt man aber:

$$P=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots},$$

und

$$Q=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots,$$

so wird:

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots$$

$$Q=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

und es ist ebenfalls $PQ=1$. Ist demnach die Summe der einen Reihe bekannt, so kennt man auch die der anderen.

§ 277.

Umgekehrt kann man, wenn die **Summen** dieser **Reihen** bekannt sind, auch die Werte der **unendlichen Producte** angeben. Denn setzt man

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots$$

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots,$$

so ist:

$$M=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

$$N=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\cdots},$$

und hieraus folgt durch Division:

$$\frac{M}{N}=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots$$

Ferner wird:

$$\frac{M^2}{N}=\frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\cdots$$

Kennt man daher M und N, so kann man nicht nur die Werte dieser Producte, sondern auch die Summen folgender Reihen angeben:

$$\frac{1}{M}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\cdots$$

$$\frac{1}{N}=1-\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}-\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}-\frac{1}{11^{2n}}-\cdots$$

$$\frac{M}{N}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots$$

$$\frac{N}{M}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\cdots,$$

und durch Combination dieser lassen sich noch viele andere ableiten.

Erstes Beispiel.

Es sei $n=1$. Da wir nun oben gezeigt haben, dass

$$\log\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\cdots$$

ist, so erhält man, wenn man $x=1$ setzt:

$$\log\frac{1}{1-1}=\log\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

Da aber der Logarithmus einer unendlich grossen Zahl selbst unendlich gross ist, so folgt:

$$M=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots=\infty.$$

Hieraus ergiebt sich wegen $\frac{1}{M} = \frac{1}{\infty} = 0$:

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \cdots$$

Ferner ist:

$$M = \infty = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\ldots},$$

folglich:

$$\infty = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdots$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots$$

Nach § 167 ist ferner die Summe der Reihe:

$$N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Daraus ergeben sich die Summen folgender Reihen:

$$\frac{6}{\pi^2} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \cdots$$

$$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \cdots$$

Ferner erhält man die Producte:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots,$$

oder

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdot\frac{169}{168}\cdots,$$

und da $\frac{M}{N} = \infty$, also $\frac{N}{M} = 0$ ist, so ist:

$$\infty = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdots$$

oder

$$0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdots$$

und

$$\infty = \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{14}{12}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{20}{18}\cdots$$

oder

$$0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdots$$

In diesen letzteren Brüchen sind mit Ausnahme des ersten die Zähler überall um 1 kleiner als die Nenner; addirt man aber den Zähler und Nenner eines jeden Bruches, so ergeben diese Summen die aufeinanderfolgenden Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Zweites Beispiel.

Ist $n = 2$, so ist aus § 167:

$$M = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Hieraus folgen zunächst die Summen der Reihen:

$$\frac{6}{\pi^2} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \cdots$$

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} - \cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{15} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} - \cdots$$

Ferner sind die Werte der folgenden Producte bekannt:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2} = \frac{2^2+1}{2^2}\cdot\frac{3^2+1}{3^2}\cdot\frac{5^2+1}{5^2}\cdot\frac{7^2+1}{7^2}\cdot\frac{11^2+1}{11^2}\cdots$$

oder

$$\frac{\pi^2}{15} = \frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{25}{26}\cdot\frac{49}{50}\cdot\frac{121}{122}\cdot\frac{169}{170}\cdots$$

und

$$\frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\cdot\frac{7^2+1}{7^2-1}\cdot\frac{11^2+1}{11^2-1}\cdots$$

oder

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdots$$

oder

$$\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdots$$

In diesen Brüchen sind die Zähler um 1 grösser als die Nenner, und die Summen von Zähler und Nenner der einzelnen Brüche ergeben die Quadrate der aufeinanderfolgenden Primzahlen $3^2, 5^2, 7^2, 11^2 \ldots$

Drittes Beispiel.

Da wir bei unseren früheren Untersuchungen den Wert von M nur für den Fall bestimmen konnten, dass n eine gerade Zahl ist, so setzen wir weiter $n=4$. Dann ist:

$$M=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

$$N=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}.$$

Hiernach lassen sich zunächst die Summen folgender Reihen angeben:

$$\frac{90}{\pi^4}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}-\cdots$$

$$\frac{9450}{\pi^8}=1-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}-\frac{1}{7^8}+\frac{1}{10^8}-\frac{1}{11^8}-\cdots$$

$$\frac{105}{\pi^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{105}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}-\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots$$

Ferner erhält man auch die Werte der Producte:

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots$$

$$\frac{\pi^8}{9450}=\frac{2^8}{2^8-1}\cdot\frac{3^8}{3^8-1}\cdot\frac{5^8}{5^8-1}\cdot\frac{7^8}{7^8-1}\cdot\frac{11^8}{11^8-1}\cdots$$

$$\frac{105}{\pi^4}=\frac{2^4+1}{2^4}\cdot\frac{3^4+1}{3^4}\cdot\frac{5^4+1}{5^4}\cdot\frac{7^4+1}{7^4}\cdot\frac{11^4+1}{11^4}\cdots$$

und

$$\frac{7}{6}=\frac{2^4+1}{2^4-1}\cdot\frac{3^4+1}{3^4-1}\cdot\frac{5^4+1}{5^4-1}\cdot\frac{7^4+1}{7^4-1}\cdot\frac{11^4+1}{11^4-1}\cdots$$

oder

$$\frac{35}{34}=\frac{41}{40}\cdot\frac{313}{312}\cdot\frac{1201}{1200}\cdot\frac{7321}{7320}\cdots$$

In diesen Brüchen sind die Zähler um 1 grösser als die Nenner; addirt man aber in jedem Bruche Zähler und Nenner, so erhält man die vierten Potenzen der Primzahlen 3, 5, 7, 11 ...

§ 278.

Da wir nun die Summe der Reihe:

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\cdots$$

auch durch ein Product dargestellt haben, so kann man bequem zu den Logarithmen übergehen. Denn da

$$M=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

ist, so wird:

$$\log M=-\log\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5^n}\right)-\log\left(1-\frac{1}{7^n}\right)-\cdots,$$

und hieraus folgt, wenn man sich der hyperbolischen Logarithmen bedient:

$$\begin{aligned}\log M=&+1\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\cdots\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\cdots\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\cdots\right)\\ &+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Setzt man ferner:

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots,$$

so dass

$$N=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\cdots}$$

ist, so wird, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt:

$$\log N = +\,1\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}}+\frac{1}{3^{6n}}+\frac{1}{5^{6n}}+\frac{1}{7^{6n}}+\frac{1}{11^{6n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}}+\frac{1}{3^{8n}}+\frac{1}{5^{8n}}+\frac{1}{7^{8n}}+\frac{1}{11^{8n}}+\cdots\right)$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen, so folgt:

$$\log M - \frac{1}{2}\log N = +\,1\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{5^{n}}+\frac{1}{7^{n}}+\frac{1}{11^{n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}}+\frac{1}{3^{5n}}+\frac{1}{5^{5n}}+\frac{1}{7^{5n}}+\frac{1}{11^{5n}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}}+\frac{1}{3^{7n}}+\frac{1}{5^{7n}}+\frac{1}{7^{7n}}+\frac{1}{11^{7n}}+\cdots\right)$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 279.

Ist $n = 1$, so wird:

$$M = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \log\infty$$

und

$$N = \frac{\pi^2}{6};$$

es wird also auch:

$$\log(\log\infty) - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{6} = +\,1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{11^5}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{11^7}+\cdots\right)$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nun haben aber diese Reihen mit Ausnahme der ersten nicht nur endliche Summen, sondern sie geben auch alle zusammengenommen eine endliche und sogar ziemlich kleine Summe; es muss daher notwendig die Summe der ersten Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ unendlich gross sein. Dieselbe ist nämlich um eine hinlänglich kleine Grösse kleiner als der hyperbolische Logarithmus der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$

§ 280.

Ist $n = 2$, so ist $M = \frac{\pi^2}{6}$ und $N = \frac{\pi^4}{90}$; mithin:

$$2\log\pi - \log 6 = 1\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\cdots\right)$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4\log\pi - \log 90 = +\,1\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{11^8}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{7^{12}}+\frac{1}{11^{12}}+\cdots\right)$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{5}{2} = +\,1\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\frac{1}{11^{10}}+\cdots\right)$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 281.

Obgleich das Gesetz, nach welchem die Primzahlen fortschreiten, nicht bekannt ist, so kann man doch ohne Schwierigkeit die Summen derartiger Reihen, wenn darin höhere Potenzen vorkommen, näherungsweise bestimmen.

Ist nämlich:

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots$$

und

$$S = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \cdots,$$

so ist:

$$S = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \cdots;$$

und da

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \cdots$$

ist, so wird:

$$S = M - \frac{M}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \cdots$$

$$= (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{27^n} - \cdots,$$

und da ferner

$$M\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \cdots$$

ist, so ergiebt sich:

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{45^n} - \cdots$$

Hieraus kann man aber, da der Wert von M bekannt ist, den Wert von S mit grosser Leichtigkeit finden, sobald n eine einigermassen grosse Zahl ist.

§ 282.

Hat man aber die Summen der höheren Potenzen gefunden, so lassen sich auch die **Summen der niedrigeren Potenzen** mit Hülfe der angegebenen Formeln leicht bestimmen. Auf diesem Wege hat man die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \cdots$$

für verschiedene Werte von n berechnet.

Ist nämlich	so ist die Summe der Reihe:
$n = 2$	0,452247420041222
$n = 4$	0,076993139764252
$n = 6$	0,017070086850639
$n = 8$	0,004061405366515
$n = 10$	0,000993603573633
$n = 12$	0,000246026470033
$n = 14$	0,000061244396725
$n = 16$	0,000015282026219
$n = 18$	0,000003817278702
$n = 20$	0,000000953961123
$n = 22$	0,000000238450446
$n = 24$	0,000000059608184
$n = 26$	0,000000014901555
$n = 28$	0,000000003725333
$n = 30$	0,000000000931323
$n = 32$	0,000000000232830
$n = 34$	0,000000000058207
$n = 36$	0,000000000014551.

Die übrigen Summen der geraden Potenzen erhält man hieraus, indem man wiederholt durch 4 dividirt.

§ 283.

Die **Verwandlung** der **Reihe**:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

in ein unendliches **Product** kann aber auch in folgender Weise direct ausgeführt werden. Ist nämlich:

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

und subtrahirt man hiervon:

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

so bleibt:

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)A = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots = B.$$

Auf diese Weise sind also alle durch 2 teilbaren Zahlen weggefallen. Subtrahirt man hiervon wieder:

$$\frac{1}{3^n}B = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \cdots,$$

wodurch man

$$\left(1-\frac{1}{3^n}\right)B=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\cdots=C$$

erhält, so sind dadurch auch alle durch 3 teilbaren Zahlen weggeschafft. Subtrahirt man also wieder hiervon:

$$\frac{1}{5^n}C=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}+\frac{1}{55^n}+\cdots,$$

so ist:

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)C=1+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\cdots,$$

worin nunmehr auch alle durch 5 teilbaren Zahlen fehlen. Auf dieselbe Weise kann man nun auch die durch 7, 11 und die anderen Primzahlen teilbaren Zahlen wegschaffen. Offenbar wird dann, nachdem die durch die einzelnen Primzahlen teilbaren Zahlen fortgefallen sind, nur allein die Einheit übrig bleiben, und es wird daher, wenn man für $B, C, D, E\ldots$ ihre Werte substituirt, schliesslich

$$A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots=1$$

werden, woraus sich für die Summe der gegebenen Reihe:

$$A=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots}$$

oder

$$A=\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\cdots$$

ergiebt.

§ 284.

Dasselbe Verfahren lässt sich nun auch anwenden, um andere Reihen, deren Summen wir oben gefunden haben, in unendliche Producte zu verwandeln. Wir kennen aber aus § 175 die Summen der Reihen von der Form:

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots,$$

sobald n eine ungerade Zahl bedeutet. Es ist nämlich die Summe dieser Reihe gleich $N\pi^n$, wobei der Wert von N aus dem angeführten Paragraphen entnommen werden kann. Da hierin nur die ungeraden Zahlen vorkommen,

so beachte man, dass die Zahlen von der Form $4m+1$ mit dem Vorzeichen $+$, die anderen von der Form $4m-1$ mit dem Vorzeichen $-$ versehen sind. Ist nun:

$$A=1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots,$$

und addirt man hierzu:

$$\frac{1}{3^n}A=\frac{1}{3^n}-\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}+\frac{1}{27^n}-\cdots,$$

so ergiebt sich:

$$\left(1+\frac{1}{3^n}\right)A=1+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=B.$$

Subtrahirt man hiervon wieder:

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}-\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\cdots,$$

so wird:

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)B=1-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=C,$$

worin nun schon die durch 3 und 5 teilbaren Zahlen nicht mehr vorkommen. Addirt man hierzu:

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}-\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\cdots,$$

so wird:

$$\left(1+\frac{1}{7^n}\right)C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=D,$$

wodurch die durch 7 teilbaren Zahlen fortgefallen sind. Addirt man weiter:

$$\frac{1}{11^n}D=\frac{1}{11^n}-\frac{1}{121^n}+\cdots,$$

wodurch sich

$$\left(1+\frac{1}{11^n}\right)D=1+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=E$$

ergiebt, so sind nun auch die durch 11 teilbaren Zahlen weggeschafft. Schafft man in derselben Weise auch alle übrigen durch die verschiedenen Primzahlen teilbaren Zahlen weg, so ergiebt sich schliesslich:

$$A\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right)\cdots=1$$

oder

$$A = \frac{3^n}{3^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n+1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdot\frac{17^n}{17^n-1}\cdots$$

Hierbei kommen in den Zählern die Potenzen aller Primzahlen vor, und eben dieselben Potenzen sind in den Nennern um 1 vermehrt oder vermindert, je nachdem die betreffende Primzahl von der Form $4m-1$ oder $4m+1$ ist.

§ 285.

Setzt man daher $n = 1$, so erhält man, da $A = \frac{\pi}{4}$ ist:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

Oben § 277 fanden wir aber:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot8}\cdot\frac{11^2}{10\cdot12}\cdot\frac{13^2}{12\cdot14}\cdot\frac{17^2}{16\cdot18}\cdot\frac{19^2}{18\cdot20}\cdots$$

Dividirt man daher die zweite Formel durch die erste, so folgt:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdots,$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdots$$

Hierin sind die Zähler die aufeinanderfolgenden Primzahlen, während die Nenner, welche sich um 1 von den Zählern unterscheiden, die ungerademal geraden Zahlen sind. Dividirt man diese letztere Gleichung von Neuem durch den für $\frac{\pi}{4}$ gefundenen Ausdruck, so erhält man noch:

$$2 = \frac{4}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{20}{18}\cdot\frac{24}{22}\cdots$$

oder

$$2 = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots$$

Diese Brüche entstehen aus den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... dadurch, dass man jede derselben in zwei sich um eine Einheit unterscheidende Teile zerlegt und sodann die geraden Teile als Zähler, die ungeraden dagegen als Nenner nimmt.

§ 286.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Wallis'schen Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\ldots}$$

oder

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots,$$

so findet man, da nach dem vorigen § 285:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots$$

ist, wenn man den Wert von $\frac{4}{\pi}$ durch diese letztere Formel dividirt:

$$\frac{32}{\pi^3} = \frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{15\cdot15}{14\cdot16}\cdot\frac{21\cdot21}{20\cdot22}\cdot\frac{25\cdot25}{24\cdot26}\cdots$$

Hierbei kommen im Zähler alle ungeraden Zahlen vor, welche keine Primzahlen sind.

§ 287.

Setzt man $n = 3$, so wird (nach § 175) $A = \frac{\pi^3}{32}$ und daher:

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{3^3}{3^3+1}\cdot\frac{5^3}{5^3-1}\cdot\frac{7^3}{7^3+1}\cdot\frac{11^3}{11^3+1}\cdot\frac{13^3}{13^3-1}\cdot\frac{17^3}{17^3-1}\cdots$$

Nun giebt aber die Reihe:

$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots$$

(nach § 277) die Formel:

$$\frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6}{2^6-1}\cdot\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdots$$

oder

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdots$$

Folglich erhält man, wenn man diese durch die erste dividirt:

$$\frac{\pi^3}{30} = \frac{3^3}{3^3-1}\cdot\frac{5^3}{5^3+1}\cdot\frac{7^3}{7^3-1}\cdot\frac{11^3}{11^3-1}\cdot\frac{13^3}{13^3+1}\cdot\frac{17^3}{17^3+1}\cdots,$$

und wenn man diese nochmals durch die erste dividirt:

$$\frac{16}{15} = \frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\frac{7^3+1}{7^3-1}\cdot\frac{11^3+1}{11^3-1}\cdot\frac{13^3-1}{13^3+1}\cdot\frac{17^3-1}{17^3+1}\cdots,$$

oder

$$\frac{16}{15}=\frac{14}{13}\cdot\frac{62}{63}\cdot\frac{172}{171}\cdot\frac{666}{665}\cdot\frac{1098}{1099}\cdots$$

Diese Brüche entstehen aus den Kuben der ungeraden Primzahlen, wenn man einen jeden in zwei sich um eine Einheit unterscheidende Teile zerlegt und die geraden Teile als Zähler, die ungeraden dagegen als Nenner nimmt.

§ 288.

Aus diesen Ausdrücken kann man wieder neue Reihen bilden, in welchen alle natürlichen Zahlen in den Nennern vorkommen.

Da nämlich

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdots$$

ist, so wird:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus entsteht, wenn man entwickelt, die Reihe:

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\cdots$$

Hierin ist das Gesetz der Vorzeichen so beschaffen, dass die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m-1$ das Zeichen —, die Primzahlen von der Form $4m+1$ das Zeichen + und die zusammengesetzten Zahlen dasjenige Vorzeichen haben, welches ihnen nach Massgabe ihrer Zusammensetzung aus den Primzahlen zukommt. So ist das Vorzeichen von $\frac{1}{60}$ offenbar —, da $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$ ist und die ersten drei Factoren mit dem Vorzeichen —, der letzte aber mit dem Vorzeichen + behaftet ist. Ebenso ist ferner:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus entspringt die Reihe:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdots$$

Hierin hat die 2 das Vorzeichen +; ferner sind die Primzahlen von der Form $4m-1$ mit dem Zeichen —, die von der Form $4m+1$ mit dem Zeichen + und die zusammengesetzten Zahlen mit demjenigen Vorzeichen zu versehen, welches ihnen nach Massgabe ihrer Zusammensetzung aus den Primzahlen zukommt.

§ 289.

Da ferner

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

ist, so entsteht durch Entwicklung die Reihe:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots,$$

worin nur die ungeraden Zahlen vorkommen, die Vorzeichen aber so beschaffen sind, dass die Primzahlen von der Form $4m-1$ das Zeichen +, die anderen von der Form $4m+1$ das Zeichen — haben, wodurch sich dann zugleich nach den Regeln der Multiplikation die Vorzeichen der zusammengesetzten Zahlen bestimmen. Hieraus lassen sich aber ferner zwei Reihen finden, worin alle Zahlen vorkommen. Es ist nämlich:

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus folgt durch Entwicklung:

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$$

Hierin haben die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m-1$ das Vorzeichen +, die Primzahlen von der Form $4m+1$ dagegen das Vorzeichen —. Ferner ist aber auch:

$$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus folgt durch Entwicklung:

$$\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots,$$

wobei die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m+1$ das Vorzeichen —, die Primzahlen von der Form $4m-1$ aber das Vorzeichen + haben.

§ 290.

Man kann aber noch unzählig viele andere Folgen der Vorzeichen finden, für welche die Summen von Reihen, welche aus den Zahlen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \cdots$$

gebildet sind, *angegeben* werden können. Da nämlich

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\cdots}$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Ausdruck mit $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$ multiplicirt,

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\cdots},$$

und hieraus:

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots$$

Es haben also die Zahlen 2 und 3 und alle Primzahlen von der Form $4m+1$ das Vorzeichen $+$, die übrigen Primzahlen von der Form $4m-1$ das Vorzeichen $-$ und die zusammengesetzten Zahlen dasjenige Vorzeichen, welches ihnen nach Massgabe ihrer Zusammensetzung zukommt. Ebenso ergiebt sich aus

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots},$$

wenn man diesen Ausdruck mit $\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3}{2}$ multiplicirt:

$$\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1+\frac{1}{17})\cdots},$$

und hieraus:

$$\frac{3\pi}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\cdots,$$

wobei die 2 und alle Primzahlen von der Form $4m-1$ das positive, die Primzahlen von der Form $4m+1$ dagegen mit alleiniger Ausnahme der Zahl 5 das negative Vorzeichen besitzen.

§ 291.

Es lassen sich aber auch *unzählig viele solche Reihen* angeben, deren *Summe gleich* 0 ist. Denn da

$$0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdots$$

ist, so wird:

$$0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

und hieraus folgt, wie wir früher sahen, die Reihe:

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\cdots,$$

worin alle Primzahlen das Vorzeichen $-$ haben, während die Vorzeichen der zusammengesetzten Zahlen sich aus den Regeln der Multiplikation ergeben. Multipliciren wir aber jenen Ausdruck mit $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$, wodurch derselbe in

$$0=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

übergeht, so entsteht daraus die Reihe:

$$0=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

wobei die 2 das Vorzeichen $+$, alle anderen Primzahlen aber das Zeichen $-$ haben. Auf ebensolche Weise erhält man auch:

$$0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

und

$$0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

worin alle Primzahlen ausser 3 und 5 das negative Vorzeichen haben. Ueberhaupt kann man bemerken, dass *so oft die sämtlichen Primzahlen*, einige wenige etwa ausgenommen, das *negative Vorzeichen besitzen, die Summe der Reihe gleich* 0 ist, dass dagegen *die Summe der Reihe unendlich gross* ist, *so oft die sämtlichen Primzahlen ausser einigen wenigen das positive Vorzeichen haben.*

§ 292.

In § 176 haben wir auch die Summe der Reihe:

$$A=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots$$

für den Fall angegeben, wo n eine *ungerade* Zahl ist. Addirt man hierzu:

$$\frac{1}{2^n}A=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}-\cdots,$$

so folgt:

$$B=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)A=1-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\frac{1}{25^n}-\cdots;$$

und wenn man hierzu wieder

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}-\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\cdots$$

addirt:

$$C=\left(1+\frac{1}{5^n}\right)B=1+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\cdots.$$

Subtrahirt man hiervon:

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}+\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\cdots,$$

so wird:

$$D=\left(1-\frac{1}{7^n}\right)C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\cdots$$

Auf diese Weise entsteht schliesslich:

$$A\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right)\cdots=1,$$

wobei alle Primzahlen, welche die Vielfachen von 6 um 1 übersteigen, das Zeichen —, diejenigen aber, welche um 1 kleiner sind, ebenso wie die 2, das Vorzeichen + haben. Es wird also:

$$A=\frac{2^n}{2^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n+1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdots$$

§ 293.

Betrachten wir den Fall $n=1$, in welchem $A=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ist, so folgt:

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdots,$$

wobei in den Zählern alle auf 3 folgenden Primzahlen vorkommen, die Nenner aber von den Zählern um eine Einheit verschieden und sämtlich durch 6 teilbar sind. Da nun

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots$$

ist, so ergiebt sich, wenn man diesen Ausdruck durch jenen dividirt:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots,$$

worin die Nenner nicht mehr durch 6 teilbar sind, oder es ist:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdots$$

Dividirt man den letzten von diesen Ausdrücken durch den vorhergehenden, so folgt:

$$\frac{4}{3}=\frac{6}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{24}{22}\cdots,$$

oder:

$$\frac{4}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdots,$$

und hierin entstehen die einzelnen Brüche aus den Primzahlen 5, 7, 11... dadurch, dass man dieselben in zwei um eine Einheit von einander verschiedene Teile zerlegt und die durch 3 teilbaren als Zähler, die andern Teile aber als Nenner nimmt.

§ 294.

Da wir oben (§ 285) gesehen haben, dass

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdots,$$

oder:

$$\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots$$

ist, so erhält man, wenn man die für $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ und $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ gefundenen Ausdrücke durch diesen Ausdruck dividirt:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{30}{29}\cdots$$

Die Brüche des ersten Ausdrucks erhält man aus den Primzahlen von der Form $12m+6\pm1$, die des letzteren aus den Primzahlen von der Form $12m\pm1$, wenn man jede derselben in zwei um eine Einheit von einander verschiedene Teile zerlegt und die geraden Teile als Zähler, die ungeraden aber als Nenner nimmt.

§ 295.

Betrachten wir nun noch die oben im § 179 gefundene Reihe:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = A,$$

so wird, wenn man hiervon

$$\frac{1}{3} A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \cdots$$

subtrahirt:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots = B.$$

Addirt man hierzu wieder:

$$\frac{1}{5} B = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \cdots,$$

so folgt:

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right) B = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots = C,$$

und indem man auf diese Weise fortfährt, erhält man schliesslich:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right)\left(1 - \frac{1}{17}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right) \cdots = 1,$$

wobei die Vorzeichen sich durch die Regel bestimmen, dass die Primzahlen von der Form $8m+1$ und $8m+3$ das Vorzeichen —, die Primzahlen von der Form $8m+5$ und $8m+7$ aber das Vorzeichen $+1$ haben müssen. Hiernach wird:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \cdots,$$

wobei die Nenner entweder durch 8 teilbar oder nur ungerademal gerade Zahlen sind. Da nun

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \cdots$$

ist, so folgt:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \cdots,$$

wobei keine durch 8 teilbaren Nenner vorkommen, die gerademal geraden Zahlen aber auftreten, sobald sie von den Zählern nur um eine Einheit verschieden sind. Dividirt man aber den ersten Ausdruck durch den letzten, so folgt:

$$1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdots,$$

wo die Brüche aus den Primzahlen dadurch entstehen, dass man jede derselben in zwei Teile zerlegt, die sich um eine Einheit unterscheiden, und die geraden Teile (ausgenommen, wenn sie gerademal gerade sind) als Zähler nimmt.

§ 296.

Ebenso lassen sich die übrigen Reihen, welche wir § 179 u. ff. für die Ausdrücke der Kreisbogen gefunden haben, in Producte verwandeln, in denen nur die Primzahlen auftreten, und man kann daher auf diesem Wege viele andere bemerkenswerte Eigenschaften sowohl der unendlichen Producte wie der unendlichen Reihen finden. Da wir indessen bereits die hauptsächlichsten angeführt haben, so wollen wir uns mit der Entdeckung noch anderer nicht länger aufhalten, sondern vielmehr zu einem anderen hiermit nahe zusammenhängenden Gegenstande übergehen. So wie wir nämlich in diesem Capitel die Zahlen, insofern sie durch Multiplikation entstehen, betrachtet haben, so wollen wir im nächsten Capitel auf die Entstehung der Zahlen durch Addition unser Augenmerk richten.

16. Capitel.

Von der Zerlegung der Zahlen in Teile.

§ 297.

Ist der Ausdruck:

$$(1+x^{\alpha}z)\,(1+x^{\beta}z)\,(1+x^{\gamma}z)\,(1+x^{\delta}z)\,(1+x^{\varepsilon}z)\ldots$$

gegeben, so entsteht die Frage: Welche Form nimmt derselbe an, wenn er durch wirkliche Ausführung der Multiplikation entwickelt wird?

Nehmen wir an, dass dadurch die Reihe:

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\cdots$$

hervorgehe, so ist offenbar:

P = der Summe der Potenzen $x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+x^{\varepsilon}+\cdots$; ferner ist
Q = der Summe der Producte aus je zwei **verschiedenen** Potenzen, oder es ist Q
= der Summe mehrerer Potenzen von x, nämlich derjenigen, deren Exponenten die Summen je zweier verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\ldots$ sind; dann ist
R = der Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen von je drei verschiedenen; ferner
S = der Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen von je vier verschiedenen Zahlen eben dieser Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\ldots$ sind;

u. s. w.

§ 298.

Die in den Ausdrücken von $P, Q, R, S, \ldots$ vorkommenden Potenzen von x haben, wenn ihre Exponenten nur auf **eine einzige** Weise aus $\alpha, \beta, \gamma\ \delta\ldots$ durch Addition gebildet werden können, als Coefficienten **sämtlich die Einheit**; wenn aber der Exponent einer in jenen Ausdrücken vorkommenden Potenz auf **mehrere** Arten aus zwei, oder aus drei, oder aus noch mehr Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\ldots$ durch Addition zusammengesetzt werden kann, so wird der Coefficient jener Potenz aus **soviel Einheiten** bestehen, als es **verschiedene Arten** der Zusammensetzung giebt. Findet sich z. B. in dem Ausdrucke von Q das Glied Nx^n, so ist dies ein Zeichen dafür, dass die Zahl n als Summe von zwei verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ auf N verschiedene Arten darstellbar ist. Und wenn in der Entwicklung des gegebenen Products das Glied $Nx^n z^m$ vorkommt, so zeigt der Coefficient N an, **auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n als Summe von m verschiedenen Zahlen** der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\ldots$ dargestellt werden kann.

§ 299.

Wenn man daher das gegebene Product

$$(1+x^{\alpha}z)\,(1+x^{\beta}z)\,(1+x^{\gamma}z)\,(1+x^{\delta}z)\ldots$$

durch Ausführung der Multiplikation wirklich entwickelt, so geht aus dem sich ergebenden Ausdrucke unmittelbar hervor, auf wieviel verschiedene Arten eine gegebene Zahl als Summe von beliebig vielen verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\ldots$ dargestellt werden kann. Wenn nämlich gefragt wird, auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n die Summe von m verschiedenen Zahlen jener Reihe sein könne, so hat man in dem entwickelten Ausdrucke das Glied $x^n z^m$ aufzusuchen, dessen Coefficient alsdann die gesuchte Zahl angiebt.

§ 300.

Damit dies recht deutlich werde, sei folgendes aus unendlich vielen Factoren bestehende Product gegeben:

$$(1+xz)\,(1+x^2z)\,(1+x^3z)\,(1+x^4z)\,(1+x^5z)\ldots$$

Entwickelt man dasselbe durch wirkliche Ausführung der Multiplikation in eine Reihe, so folgt:

$$\begin{aligned}
1 &+ z\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \cdots)\\
&+ z^2(x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \cdots)\\
&+ z^3(x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + 10x^{14} + \cdots)\\
&+ z^4(x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} + 11x^{17} + 15x^{18} + \cdots)\\
&+ z^5(x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + 7x^{20} + 10x^{21} + 13x^{22} + 18x^{23} + \cdots)\\
&+ z^6(x^{21} + x^{22} + 2x^{23} + 3x^{24} + 5x^{25} + 7x^{26} + 11x^{27} + 14x^{28} + 20x^{29} + \cdots)\\
&+ z^7(x^{28} + x^{29} + 2x^{30} + 3x^{31} + 5x^{32} + 7x^{33} + 11x^{34} + 15x^{35} + 21x^{36} + \cdots)\\
&+ z^8(x^{36} + x^{37} + 2x^{38} + 3x^{39} + 5x^{40} + 7x^{41} + 11x^{42} + 15x^{43} + 22x^{44} + \cdots)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aus diesen Reihen also lässt sich sogleich angeben, auf wieviel verschiedene Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Anzahl verschiedener Glieder der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... durch Addition entstehen kann. Wollte man z. B. wissen, auf wie vielerlei Arten die Zahl 35 die Summe von 7 verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... sein könne, so suche man in der Reihe, welche mit z^7 multiplicirt ist, die Potenz x^{35} auf, dann giebt der Coefficient 15 derselben an, dass die gegebene Zahl 35 auf 15 verschiedene Arten als Summe von 7 Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... dargestellt werden kann.

§ 301.

Setzt man aber $z = 1$ und vereinigt man die gleichen Potenzen von x oder, was dasselbe ist, entwickelt man den unendlichen Ausdruck:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\ldots$$

in die Reihe:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \ldots,$$

so giebt ein jeder Coefficient an, auf wie vielerlei Arten der Exponent der betreffenden Potenz von x überhaupt aus verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... durch Addition entstehen kann. So lässt sich die Zahl 8 augenscheinlich auf 6 Arten durch Addition verschiedener Zahlen hervorbringen, und zwar sind diese:

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 8 &= 7 + 1 \\ 8 &= 6 + 2 \\ 8 &= 5 + 3 \\ 8 &= 5 + 2 + 1 \\ 8 &= 4 + 3 + 1. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die gegebene Zahl selbst mitgerechnet werden muss, weil die Anzahl der zu nehmenden Glieder nicht vorgeschrieben ist, und daher auch ein einziges genommen werden kann.

§ 302.

Hiernach sieht man also, wie eine jede Zahl durch Addition verschiedener Zahlen entstehen kann. Man lässt aber die Bedingung, dass die einzelnen Zahlen verschieden sein sollen, fallen, sobald man die eben betrachteten Factoren in den Nenner setzt. Ist also der Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)(1-x^{\varepsilon}z)\ldots}$$

gegeben, und geht daraus, wenn man die Division wirklich ausführt, die Reihe

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \cdots$$

hervor, so ist offenbar:

P = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten in der Reihe α, β, γ, δ, ε, ζ, η ... enthalten sind; ferner ist

Q = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten Summen zweier Zahlen dieser Reihe sind, so aber, dass diese Zahlen auch einander gleich sein können; ebenso ist

R = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten durch Addition von drei solchen Zahlen jener Reihe entstehen;

S = der Summe der Potenzen von x, deren Exponenten durch Addition von vier solchen, in jener Reihe enthaltenen, Zahlen gebildet sind;

u. s. w.

§ 303.

Wenn man also den ganzen Ausdruck nach allen seinen Gliedern entwickelt und die Glieder mit derselben Potenz von z zusammenfasst, so erkennt man daraus, auf wie viel verschiedene Arten eine gegebene Zahl n durch Addition von m teils verschiedenen, teils nicht verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ ... entstehen kann. Sucht man nämlich in dem entwickelten Ausdruck das Glied $x^n z^m$ auf, und ist dessen Coefficient N, so dass also das ganze Glied $Nx^n z^m$ heisst, so zeigt der Coefficient N an, auf wie vielerlei Arten die Zahl n durch Addition von m in der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ enthaltenen Zahlen gebildet werden kann. Hierdurch wird die gegenwärtige Frage derjenigen, die wir kurz vorher beantwortet haben, vollkommen analog erledigt.

§ 304.

Wir wollen dies auf einen besonders merkwürdigen Fall anwenden. Wir denken uns nämlich den Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots}$$

durch Ausführung der Division in die Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} 1 &+ z\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \cdots) \\ &+ z^2(x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + \cdots) \\ &+ z^3(x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + 10x^{11} + \cdots) \\ &+ z^4(x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 9x^{10} + 11x^{11} + 15x^{12} + \cdots) \\ &+ z^5(x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} + 13x^{12} + 18x^{13} + \cdots) \\ &+ z^6(x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} + 14x^{13} + 20x^{14} + \cdots) \\ &+ z^7(x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} + 15x^{14} + 21x^{15} + \cdots) \\ &+ z^8(x^8 + x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 7x^{13} + 11x^{14} + 15x^{15} + 22x^{16} + \cdots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen Reihen lässt sich daher unmittelbar angeben, auf wieviel verschiedene Arten eine gegebene Zahl durch Addition einer vorgeschriebenen Anzahl von Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... entstehen kann. Wollte man z. B. wissen, auf wie vielerlei Arten die Zahl 13 durch Addition von fünf ganzen Zahlen gebildet werden kann, so suche man das Glied $x^{13}z^5$ auf; dann giebt der Coefficient 18 desselben an, dass die gegebene Zahl 13 durch Addition von 5 Zahlen auf 18 verschiedene Arten entsteht.

§ 305.

Setzt man aber $z = 1$ und zieht die gleich hohen Potenzen von x zusammen, so ergiebt sich durch Entwicklung des Ausdrucks:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots}$$

die Reihe:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + \cdots,$$

in welcher jeder Coefficient angiebt, auf wie vielerlei Arten der Exponent der zugehörigen Potenz überhaupt durch Addition von ganzen Zahlen, mögen dieselben nun gleich oder ungleich sein, hervorgebracht werden kann. So erkennt man aus dem Gliede $11x^6$, dass die Zahl 6 aus ganzen Zahlen auf 11 verschiedene Arten durch Addition zusammengesetzt werden kann, und zwar ist:

$$\begin{aligned}
6 &= 6\\
6 &= 5 + 1\\
6 &= 4 + 2\\
6 &= 4 + 1 + 1\\
6 &= 3 + 3\\
6 &= 3 + 2 + 1\\
6 &= 3 + 1 + 1 + 1\\
6 &= 2 + 2 + 2\\
6 &= 2 + 2 + 1 + 1\\
6 &= 2 + 1 + 1 + 1 + 1\\
6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
\end{aligned}$$

Dabei ist ebenfalls zu bemerken, dass die gegebene Zahl, da sie in der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6... selbst enthalten ist, auch als eine Art der Darstellung gerechnet werden muss.

§ 306.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir nun näher darauf eingehen, wie man die Anzahl dieser Darstellungen wirklich findet, und zwar wollen wir dabei mit dem auch vorher zuerst betrachteten Falle beginnen, in welchem die ganzen Zahlen, welche man bei der Zusammensetzung einer Zahl durch Addition anwendet, von einander verschieden sind. Dazu möge der Ausdruck:

$$Z = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\ldots$$

gegeben sein, und dieser möge, wenn man ihn entwickelt und nach Potenzen von z ordnet, die Reihe ergeben:

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \cdots$$

Es handelt sich darum, ein Verfahren zu ermitteln, nach welchem man die Functionen $P, Q, R, S, T\ldots$ auf eine leichte Art finden kann. Findet man ein solches, so ist dadurch die vorgelegte Frage in der besten Weise erledigt.

§ 307.

Wenn man nun an Stelle von z setzt xz, so erhält man offenbar:

$$(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z)(1 + x^5z)\cdots = \frac{Z}{1 + xz}.$$

Es geht somit der Wert des Productes Z dadurch, dass man darin für z setzt xz, über in $\frac{Z}{1+xz}$, und es ist daher, da

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \cdots$$

war:

$$\frac{Z}{1 + xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \cdots$$

Multiplicirt man aber diese Gleichung mit $1 + xz$, so wird:

$$\begin{aligned}
Z = 1 &+ Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \cdots\\
&+ xz + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \cdots,
\end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn man diesen Wert von Z mit dem früheren vergleicht:

$$P = \frac{x}{1-x},\quad Q = \frac{Px^2}{1-x^2},\quad R = \frac{Qx^3}{1-x^3},\quad S = \frac{Rx^4}{1-x^4},\ \ldots$$

Man erhält daher die folgenden Werte:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$T = \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

u. s. w.

§ 308.

Wir können daher auf diese Weise eine **jede** derjenigen **Potenzenreihen** von x, aus welchen bestimmt werden soll, auf wieviel verschiedene Arten sich eine gegebene Zahl aus einer vorgeschriebenen Anzahl ganzer Teile durch Addition zusammensetzen lässt, wirklich **besonders darstellen.** Ueberdies aber geht hieraus hervor, dass diese Reihen **rekurrente** Reihen sind, da sie aus der Entwicklung einer gebrochenen Function von x entstehen. So giebt der erste Ausdruck:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

die geometrische Reihe:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots,$$

woraus sofort erhellt, dass jede Zahl nur einmal in der Reihe der ganzen Zahlen enthalten ist.

§ 309.

Der zweite Ausdruck:

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

giebt die Reihe:

$$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \cdots,$$

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes angiebt, wie oft der Exponent von x sich in zwei ungleiche Teile zerlegen lässt. So geht aus dem Gliede $4x^9$ hervor, dass die Zahl 9 auf 4 Arten in zwei ungleiche Teile

geteilt werden kann. Dividirt man nun obige Reihe durch x^3, so erhält man diejenige Reihe, welche aus der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

entspringt, nämlich:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \cdots.$$

Bezeichnet man das allgemeine Glied dieser Reihe mit Nx^n, so folgt aus der Art der Entstehung derselben, dass der Coefficient N anzeigt, auf wieviel verschiedene Weisen der Exponent n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition zusammengesetzt werden kann. Da nun das allgemeine Glied der früheren Reihe gleich Nx^{n+3} ist, so ergiebt sich hieraus der **Satz:**

Die Zahl $n+3$ lässt sich auf eben soviele verschiedene Arten in **zwei** ungleiche Teile teilen, als die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 310.

Der dritte Ausdruck:

$$\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

giebt, wenn man ihn entwickelt, die Reihe:

$$x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \cdots,$$

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes angiebt, auf wieviel Arten sich der Exponent der zugehörigen Potenz von x in drei ungleiche Teile teilen lässt. Durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

aber entsteht die Reihe:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \cdots,$$

und hierin giebt, wenn das allgemeine Glied der Reihe mit Nx^n bezeichnet wird, der Coefficient N an, auf wie vielerlei Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch Addition entstehen kann. Da nun das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe gleich Nx^{n+6} ist, so folgt hieraus der **Satz:**

Die Zahl $n+6$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in **drei** ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 311.

Der vierte Ausdruck:

$$\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

giebt, wenn man ihn entwickelt, die rekurrente Reihe:

$$x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+\cdots,$$

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes anzeigt, wie oft sich der Exponent der zugehörigen Potenz von x in vier ungleiche Teile teilen lässt. Durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

aber erhält man die vorhergehende Reihe durch x^{10} dividirt, nämlich:

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+6x^5+9x^6+11x^7+\cdots$$

Setzt man das allgemeine Glied dieser Reihe gleich Nx^n, so giebt der Coefficient N offenbar an, auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n aus den vier Zahlen 1, 2, 3, 4 durch Addition gebildet werden kann. Da nun das allgemeine Glied der vorigen Reihe Nx^{n+10} ist, so folgt hieraus der **Satz**:

> Die Zahl $n+10$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in vier ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 312.

Allgemein also giebt der Coefficient N, wenn man den Ausdruck:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe entwickelt und das allgemeine Glied derselben mit Nx^n bezeichnet, an, auf wieviel verschiedene Arten die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4 \ldots m$ durch Addition entstehen kann. Entwickelt man aber den Ausdruck:

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe, so ist das allgemeine Glied derselben gleich $Nx^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, während der Coefficient N dabei anzeigt, wie oft die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m ungleiche Teile geteilt werden kann. Daraus folgt also der **Satz**:

> Die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{2}$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in m ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4 \ldots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 313.

Nachdem wir die Zerlegung der Zahlen in ungleiche Teile betrachtet haben, wollen wir nun auch die Zerlegung der Zahlen in Teile für den Fall untersuchen, wo die **Gleichheit** der einzelnen Teile **nicht ausgeschlossen** ist. Diese Betrachtung beruht auf dem Ausdruck:

$$Z=\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots},$$

welcher durch Ausführung der Division die Reihe liefern möge:

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\cdots$$

Setzt man nun xz an die Stelle von z, so wird offenbar:

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots}=(1-xz)\,Z,$$

und wenn man in der Reihe dieselbe Substitution macht:

$$(1-xz)\,Z=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\cdots$$

Multiplicirt man aber obige Reihe mit $1-xz$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(1-xz)\,Z=1&+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\cdots\\ &-xz-Pxz^2-Qxz^3-Rxz^4-\cdots\end{aligned}$$

Vergleicht man also die beiden Ausdrücke, so folgt:

$$P=\frac{x}{1-x},\quad Q=\frac{Px}{1-x^2},\quad R=\frac{Qx}{1-x^3},\quad S=\frac{Rx}{1-x^4}\ldots,$$

und hieraus ergeben sich für $P, Q, R, S\ldots$ die Werte:

$$P=\frac{x}{1-x}$$

$$Q=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

u. s. w.

§ 314.

Diese Ausdrücke unterscheiden sich von den früheren nur dadurch, dass hier die Zähler kleinere Exponenten haben, als im vorhergehenden Falle. Es stimmen daher auch die Reihen, welche sich durch Entwicklung dieser Ausdrücke ergeben, in Bezug auf ihre Coefficienten vollständig mit den früheren überein, ein Umstand, der übrigens auch schon aus der Vergleichung der §§ 300 und 304 erhellt, dessen Grund aber erst hier ersichtlich ist. Hieraus folgen somit ganz ähnliche Sätze wie oben, nämlich:

Die Zahl $n+2$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in zwei Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Die Zahl $n+3$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in drei Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Die Zahl $n+4$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in vier Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Und allgemein:

Die Zahl $n+m$ lässt sich auf ebenso viele verschiedene Arten in m Teile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

§ 315.

Die Frage also, auf wieviel Arten sich eine gegebene Zahl in m ungleiche oder überhaupt in m, teils gleiche, teils ungleiche, Teile zerlegen lasse, kann in jedem Falle beantwortet werden, wenn man weiss, auf wieviel Arten sich eine jede Zahl durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ zusammensetzen lässt. Es erhellt dies aus den folgenden Sätzen, die aus den früheren abgeleitet sind:

Eine Zahl n lässt sich auf ebenso viele Arten in m ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl $n-\frac{m(m+1)}{2}$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann.

Eine Zahl n lässt sich auf ebenso viele Arten in m Teile **überhaupt**, mögen dieselben **gleich oder ungleich** sein, zerlegen, als die Zahl $n-m$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann.

Hieraus folgen ferner die Sätze:

Die Zahl n lässt sich ebenso oft in m **ungleiche** Teile zerlegen, als sich die Zahl $n-\frac{m(m+1)}{2}$ in m Teile überhaupt, seien es **gleiche oder ungleiche**, zerlegen lässt.

Die Zahl n lässt sich ebenso oft in m Teile **überhaupt**, seien es **gleiche oder ungleiche**, zerlegen, als sich die Zahl $n+\frac{m(m+1)}{2}$ in m **ungleiche** Teile zerlegen lässt.

§ 316.

Dadurch nun, dass man die rekurrenten Reihen wirklich bildet, findet man auch, auf wieviel Arten sich eine gegebene Zahl durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ zusammensetzen lässt. Zu diesem Zwecke müsste man den Bruch:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

entwickeln und die daraus entspringende rekurrente Reihe bis zu dem Gliede Nx^n fortsetzen, dessen Coefficient N angiebt, auf wie vielerlei Arten die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots m$ entstehen kann. Indessen würde die Erledigung der in Rede stehenden Frage auf diesem Wege nicht geringe Schwierigkeiten darbieten, sobald m und n auch nur mässig grosse Zahlen sind. Denn da die Beziehungsskala, welche sich aus dem durch Ausführung der Multiplikation entwickelten Nenner ergiebt, aus einer grösseren Anzahl von Gliedern besteht, so würde es sehr viel Mühe machen, wenn man die Reihe bis zu einem höheren Gliede fortsetzen wollte.

§ 317.

Man erleichtert sich die Sache aber sehr, wenn man zunächst die einfacheren Fälle entwickelt, da alsdann der Uebergang von diesen zu den zusammengesetzteren leicht ist. Ist nun das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

entspringt, gleich Nx^n, ferner das allgemeine Glied der aus dem Bruche:

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

entstehenden Reihe gleich Mx^n, wo der Coefficient M angiebt, auf wieviel Arten die Zahl $n-m$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ zusammengesetzt werden kann, so ergiebt sich, wenn man den letzteren Ausdruck von dem ersten subtrahirt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^{m-1})},$$

und es ist klar, dass das allgemeine Glied der hieraus entspringenden Reihe gleich $(N-M)x^n$ ist. Es giebt somit der Coefficient $N-M$ an, auf wieviel Arten die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m-1$ gebildet werden kann.

§ 318.

Hieraus ergiebt sich demnach folgende **Regel**:

> Es sei L die Zahl, welche angiebt, auf wieviel Arten sich die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m-1$,
>
> ferner M die Zahl, welche angiebt, auf wieviel Arten sich die Zahl $n-m$ durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$,
>
> endlich N die Zahl, welche angiebt, auf wieviel Arten sich die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots m$ zusammensetzen lässt;
>
> alsdann ist, wie wir gesehen haben,
>
> $$L = N - M \text{ und daher } N = L + M.$$

Wenn man daher bereits gefunden hat, auf wieviel Arten sich die Zahlen n und $n-m$, und zwar erstere aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m-1$, letztere aber aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$, durch Addition hervorbringen lassen, so findet man dadurch, dass man die beiden Anzahlen addirt, zugleich, auf wieviel Arten die Zahl n durch Addition aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$ hergeleitet werden kann. Mittelst dieses Satzes kann man von den einfacheren Fällen, welche weiter keine Schwierigkeiten darbieten, stufenweise zu den zusammengesetzteren fortgehen. Auf diese Weise ist die nebenstehende **Tabelle** berechnet worden.

Der **Gebrauch** dieser Tabelle ist folgender:

Will man wissen, wie oft die Zahl 50 in 7 ungleiche Teile sich zerlegen lasse, so nehme man in der ersten Vertikalreihe die Zahl $50 - \frac{7 \cdot 8}{2} = 22$ und in der obersten Horizontalreihe die römische Zahl VII. Die Zahl 522, welche sich mit 22 in derselben Horizontal- und mit VII in derselben Vertikalreihe befindet, giebt alsdann die gesuchte Anzahl an.

Will man aber wissen, wie oft die Zahl 50 in 7 Teile überhaupt, seien es gleiche oder ungleiche, zerlegt werden könne, so nehme man in der ersten Vertikalreihe die Zahl $50 - 7 = 43$ und suche die mit 43 in gleicher Horizontalreihe befindliche Zahl der mit VII bezeichneten Vertikalreihe. Die so sich ergebende Zahl 8946 ist die gesuchte.

Tabelle.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331
28	1	15	80	249	540	931	1367	1801	2194	2534	2812
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5788
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298
41	1	21	161	672	1898	4070	7190	11018	15224	19466	23501
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169
43	1	22	176	754	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043
45	1	23	192	864	2611	5942	11044	17674	25331	33401	41373
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	38047	47420
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61575	97922	141136	18855[illegible]
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629281
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097

§ 319.

Die Vertikalreihen dieser Tabelle sind zwar rekurrente Reihen, sie stehen indessen mit den natürlichen Zahlen, sowie mit den Trigonal-, Pyramidalzahlen u. s. w. in so engem Zusammenhange, dass es sich der Mühe lohnt, kurz darauf einzugehen. Da nämlich aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

die Reihe:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \cdots,$$

und somit aus

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

die Reihe:

$$x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + \cdots$$

hervorgeht, so erhält man durch Addition beider Reihen die folgende Reihe:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \cdots,$$

also die Reihe, welche durch Ausführung der Division aus dem Bruche:

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

entspringt. Daraus geht hervor, dass die Coefficienten der einzelnen Glieder der letzten Reihe die Reihe der natürlichen Zahlen ergeben. Wenn man daher aus der Tabelle die Zahlen der Vertikalreihe II nimmt und

immer zwei aufeinanderfolgende addirt, so erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen, nämlich, wenn oben $x = 1$ gesetzt wird:

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + \cdots$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \cdots$$

Umgekehrt findet man aus der Reihe der natürlichen Zahlen die erste Reihe, wenn man jedes Glied der oberen Reihe von dem auf das entsprechende Glied der unteren Reihe folgenden Gliede dieser letzteren subtrahirt.

§ 320.

Die mit III bezeichnete Vertikalreihe entspringt aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Da nun aber:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

ist, so muss man offenbar dadurch, dass man zunächst je drei aufeinanderfolgende Glieder dieser Reihe und sodann je zwei aufeinanderfolgende Glieder der dadurch entstehenden neuen Reihe addirt, die Trigonalzahlen erhalten. Dies erhellt aus folgendem Schema:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 19 + \cdots$$
$$1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + 36 + 42 + 49 + \cdots$$
$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + \cdots$$

Umgekehrt ergiebt sich daraus, wie aus der Reihe der Trigonalzahlen die erste Reihe gefunden wird.

§ 321.

Ebenso ist, da die mit IV bezeichnete Vertikalreihe aus dem Bruche:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

entspringt:

$$\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

Wenn man also in der angegebenen Reihe zunächst je vier aufeinanderfolgende Glieder, in der dadurch entstehenden neuen Reihe sodann je drei aufeinanderfolgende, und endlich in der hierdurch erhaltenen Reihe je zwei aufeinanderfolgende Glieder addirt, so erhält man die Pyramidalzahlen, wie aus folgender Rechnung erhellt:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + 23 + 27 + \cdots$$
$$1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + 67 + 83 + \cdots$$
$$1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + 161 + 203 + \cdots$$
$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + 286 + 364 + \cdots$$

In derselben Weise führt die mit V bezeichnete Reihe zu den Pyramidalzahlen zweiter Ordnung, die mit VI bezeichnete zu den Pyramidalzahlen dritter Ordnung u. s. w.

§ 322.

Umgekehrt können aus den figurirten Zahlen die in der Tabelle vorkommenden Reihen abgeleitet werden. Das dazu anzuwendende Verfahren leuchtet beim Anblick der folgenden Rechnung von selbst ein:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\cdots$$
$$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+\cdots \quad \text{Reihe II}$$

$$1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+\cdots$$
$$1+2+4+6+9+12+16+20+25+30+\cdots$$
$$1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+\cdots \quad \text{Reihe III}$$

$$1+4+10+20+35+56+84+120+165+220+\cdots$$
$$1+3+7+13+22+34+50+70+95+125+\cdots$$
$$1+2+4+7+11+16+23+31+41+53+\cdots$$
$$1+1+2+3+5+6+9+11+15+18+\cdots \quad \text{Reihe IV}$$

$$1+5+15+35+70+126+210+330+495+715+\cdots$$
$$1+4+11+24+46+80+130+200+295+420+\cdots$$
$$1+3+7+14+25+41+64+95+136+189+\cdots$$
$$1+2+4+7+12+18+27+38+53+71+\cdots$$
$$1+1+2+3+5+7+10+13+18+23+\cdots \quad \text{Reihe V}$$

u. s. w.

Hierin sind die ersten Reihen die figurirten Zahlen; zieht man jedes Glied der zweiten Reihe von dem nächstfolgenden der ersten Reihe ab, so erhält man die zweite Reihe. Die dritte Reihe bildet man, indem man die Summe je zweier aufeinanderfolgenden Glieder derselben von dem nächsten Gliede der zweiten Reihe subtrahirt. Ebenso bildet man die Glieder jeder folgenden Reihe, indem man die Summe von je drei, vier u. s. w. benachbarten Gliedern von dem folgenden Gliede der nächstvorhergehenden Reihe abzieht und damit so lange fortfährt, bis man zu einer Reihe gelangt, welche mit $1+1+2+\cdots$ anfängt und eben die in der Tabelle befindliche Reihe darstellt.

§ 323.

Die Vertikalreihen der Tabelle fangen sämtlich in derselben Weise an und haben, je grösser der zugehörige Stellenzeiger wird, mehr und mehr Glieder mit einander gemein. Daraus ist ersichtlich, dass sie schliesslich ganz und gar mit einander übereinstimmen werden.

Es ergiebt sich nämlich dann die Reihe, welche aus dem Bruche entspringt:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots}$$

Da dieselbe rekurrent ist, so müssen wir zuerst den Nenner betrachten, um daraus die Beziehungsskala zu erhalten. Multiplicirt man aber die Factoren des Nenners nach und nach mit einander, so ergiebt sich die Reihe:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\cdots$$

Sieht man dieselbe näher an, so findet sich, dass sie nur solche Potenzen von x enthält, deren Exponenten von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ sind, und dass die einzelnen Glieder positiv oder negativ sind, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§ 324.

Da somit die Beziehungsskala die folgende ist:

$$+1,\ +1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ +1,\ 0,\ 0,\ +1,\ 0,\ 0\ \ldots,$$

so ist die aus der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots}$$

entstehende Reihe:

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+56x^{11}+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}+385x^{18}+490x^{19}+627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1250x^{23}+1570x^{24}+\cdots$$

In dieser Reihe giebt jeder Coefficient an, wie oft der Exponent der zugehörigen Potenz von x aus ganzen Zahlen überhaupt durch Addition zusammengesetzt werden kann. So kann die Zahl 7 auf 15 verschiedene Arten durch Addition entstehen, nämlich:

$$7=7$$
$$7=6+1$$
$$7=5+2$$
$$7=5+1+1$$
$$7=4+3$$
$$7=4+2+1$$
$$7=4+1+1+1$$
$$7=3+3+1$$
$$7=3+2+1+1$$
$$7=3+1+1+1+1$$
$$7=2+2+2+1$$
$$7=2+2+1+1+1$$
$$7=2+1+1+1+1+1$$
$$7=1+1+1+1+1+1+1.$$

§ 325.

Entwickelt man aber das Product

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots$$

in eine Reihe, so wird dieselbe:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\cdots,$$

und hierin giebt jeder Coefficient an, auf wieviel Arten der Exponent der zugehörigen Potenz von x **durch Addition aus ungleichen ganzen Zahlen** gebildet werden kann. So lässt sich die Zahl 9 auf 8 verschiedene Weisen aus ungleichen Zahlen durch Addition zusammensetzen, nämlich:

$$\begin{aligned}9&=9\\9&=8+1\\9&=7+2\\9&=6+3\\9&=6+2+1\\9&=5+4\\9&=5+3+1\\9&=4+3+2.\end{aligned}$$

§ 326.

Um nun eine Vergleichung zwischen diesen Formen anzustellen, sei:

$$P=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots$$
$$Q=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots,$$

also:

$$PQ=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12})\cdots$$

Da die Factoren dieses Products auch sämtlich in P enthalten sind, so folgt, wenn man P durch PQ dividirt:

$$\frac{1}{Q}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\cdots,$$

und daher:

$$Q=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\cdots}.$$

Entwickelt man aber diesen Bruch, so erhält man eine Reihe, in welcher jeder Coefficient angiebt, auf wieviel verschiedene Arten der Exponent der betreffenden Potenz von x durch Addition aus den ungeraden Zahlen entstehen kann. Da nun dieser Ausdruck demjenigen gleich ist, den wir im vorhergehenden Paragraphen betrachtet haben, so folgt hieraus der **Satz:**

> Jede Zahl lässt sich durch Addition aus lauter ungeraden, sei es gleichen, sei es ungleichen, Zahlen auf **ebenso viele** verschiedene Arten zusammensetzen, als sie durch Addition aus **allen** ganzen, aber von einander **verschiedenen** Zahlen gebildet werden kann.

§ 327.

Wie wir vorher sahen, ist:

$$P=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\cdots$$

Setzt man hierin x^2 für x, so erhält man:

$$PQ=1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-\cdots$$

Es ergiebt sich daher, wenn man die zweite Reihe durch die erste dividirt:

$$Q=\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\cdots}.$$

Mithin ist Q ebenfalls eine rekurrente Reihe, die aus der Reihe $\frac{1}{P}$ entsteht, wenn man dieselbe mit $1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-\cdots$ multiplicirt. Da nun nach § 324:

$$\frac{1}{P}=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\cdots$$

ist, so wird diese Reihe, wenn man sie mit

$$1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-\cdots$$

multiplicirt:

$$\begin{aligned}&1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\cdots\\&\quad-x^2-x^3-2x^4-3x^5-5x^6-7x^7-11x^8-15x^9-\cdots\\&\qquad\qquad-x^4-x^5-2x^6-3x^7-5x^8-7x^9-\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

oder:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+\cdots=Q.$$

Wenn daher die additive Zusammensetzung der Zahlen aus **teils gleichen, teils ungleichen** Zahlen bekannt ist, so kann man daraus auch die additive Zusammensetzung derselben aus **lauter ungleichen** und daraus wieder die additive Zusammensetzung aus **lauter ungeraden** Zahlen ableiten.

§ 328.

Es sind nun hierbei noch einige merkwürdige Fälle übrig, deren Untersuchung bei der Erforschung der Natur der Zahlen nicht ohne Nutzen ist. Man betrachte z. B. den folgenden Ausdruck:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots,$$

in welchem jeder folgende Exponent von x das Doppelte des vorhergehenden ist. Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man folgende Reihe:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\cdots$$

Da es indessen dem Zweifel unterliegen könnte, ob diese Reihe auch wirklich bis ins Unendliche dem Gesetze der geometrischen Progression gemäss fortschreite, so wollen wir diese Reihe selbst untersuchen. Es gehe also aus dem Producte:

$$P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots$$

durch Entwicklung desselben die Reihe hervor:

$$P=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\vartheta x^8+\cdots$$

Nun geht aber offenbar dadurch, dass man x^2 für x setzt, das Product über in:

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots=\frac{P}{1+x}.$$

Macht man daher in der Reihe dieselbe Substitution, so wird:

$$\frac{P}{1+x}=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+\zeta x^{12}+\cdots,$$

folglich, wenn man mit $1+x$ multiplicirt,

$$P=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+\cdots$$

Vergleicht man also die beiden Werte von P mit einander, so ergiebt sich:

$$\alpha=1,\ \beta=\alpha,\ \gamma=\alpha,\ \delta=\beta,\ \varepsilon=\beta,\ \zeta=\gamma,\ \eta=\gamma,\ \text{u. s. w.}$$

Es werden somit alle Coefficienten gleich 1, und durch Entwicklung des gegebenen Productes P entsteht die geometrische Reihe:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\cdots$$

§ 329.

Da nun hierin die sämtlichen Potenzen von x, und zwar jede nur einmal, vorkommen, so folgt aus der Form des Products:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots,$$

dass sich eine jede ganze Zahl aus verschiedenen Gliedern der geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32 ..., bei welcher der Quotient aufeinanderfolgender Glieder gleich 2 ist, stets und nur auf eine einzige Weise durch Addition bilden lässt. Diese Eigenschaft ist in der Praxis bekannt beim Wägen. Hat man nämlich Gewichte von 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... Pfund, so kann man damit allein jede Last wägen, vorausgesetzt, dass man von den Teilen eines Pfundes absieht. So kann man mit den zehn Gewichten:

1 ℔, 2 ℔, 4 ℔, 8 ℔, 16 ℔, 32 ℔, 64 ℔, 128 ℔, 256 ℔, 512 ℔

jede Last bis zu 1024 ℔ wägen, und wenn man noch ein Gewicht von 1024 ℔ hinzunimmt, so reicht man damit bis zu Lasten von 2048 ℔ aus.

§ 330.

Man pflegt aber in den Anleitungen zum Wägen auch noch zu zeigen, dass man mit noch weniger Gewichten, von denen jedes zu dem nächstgrösseren im Verhältnis von 1:3 steht, also mit Gewichten von 1, 3, 9, 27, 81 ... Pfund jede Last wägen kann, falls man Bruchteile eines Pfundes nicht berücksichtigt. Dabei darf man aber die Gewichte nicht bloss auf die eine Wagschale legen wollen, sondern man muss, sowie es die Umstände erfordern, beide Wagschalen damit belasten. Dies Verfahren beruht darauf, dass man aus den Gliedern der geometrischen Reihe 1, 3, 9, 27, 81 ... eine jede Zahl teils durch Addition, teils durch Subtraction zusammensetzen kann. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
1&=1\\
2&=3-1\\
3&=3\\
4&=3+1\\
5&=9-3-1\\
6&=9-3\\
7&=9-3+1\\
8&=9-1\\
9&=9\\
10&=9+1\\
11&=9+3-1\\
12&=9+3
\end{aligned}$$

u. s. w.

§ 331.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu zeigen, betrachte man das unendliche Product:

$$(x^{-1}+1+x)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27})\cdots=P.$$

In der Entwicklung desselben kommen nur solche Potenzen von x vor, deren Exponenten aus den Zahlen 1, 3, 9, 27, 81 ..., sei es durch Addition, sei es durch Subtraction, gebildet werden können. Um aber zu erfahren, ob auch alle Potenzen, und zwar jede nur einmal, darin vorkommen, verfahren wir folgendermassen: Ist

$$P = \cdots + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \cdots,$$

so erhält man offenbar, wenn man x^3 für x schreibt:

$$\frac{P}{x^{-1} + 1 + x^1} = \cdots + bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^3 + \beta x^6 + \gamma x^9 + \cdots$$

Folglich:

$$P = \cdots + ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha x^4 + \beta x^5 + \beta x^6 + \beta x^7 + \cdots$$

Vergleicht man aber die beiden Ausdrücke für P mit einander, so ergiebt sich:

$$\alpha = 1,\ \beta = \alpha,\ \gamma = \alpha,\ \delta = \alpha,\ \varepsilon = \beta,\ \zeta = \beta,\ \ldots$$
$$a = 1,\ b = a,\ c = a,\ d = a,\ e = b,\ \ldots$$

Mithin wird:

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \cdots.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass alle Potenzen von x, sowohl die mit positiven wie die mit negativen Exponenten, vorkommen, und dass somit alle Zahlen aus den Gliedern der geometrischen Progression, deren Quotient 3 ist, teils durch Addition, teils durch Subtraction gebildet werden können, und zwar eine jede nur auf eine einzige Weise.

17. Capitel.

Von dem Gebrauch der rekurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen.

§ 332.

Im dritten Bande der Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg hat Daniel Bernoulli den grossen **Nutzen der rekurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln einer Gleichung** von irgend welchem Grade gezeigt, indem er nachwies, wie man die Werte der Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung, sie möge sein, von welchem Grade sie wolle, mit Hülfe der rekurrenten Reihen annähernd genau bestimmen kann. Da diese Entdeckung sehr häufig grossen Vorteil bietet, so wollen wir sie hier sorgfältiger auseinandersetzen und zeigen, in welchen Fällen sie anwendbar ist. Zuweilen nämlich geschieht es wider alle Erwartung, dass man eine Wurzel der Gleichung auf diesem Wege nicht findet. Wir wollen daher, um die Bedeutung dieses Verfahrens recht klar hervortreten zu lassen, den eigentlichen Grund desselben aus den Eigenschaften der rekurrenten Reihen zu erforschen suchen.

§ 333.

Da jede rekurrente Reihe durch Entwicklung eines rationalen Bruches entsteht, so sei dieser Bruch:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

und hieraus entspringe die rekurrente Reihe:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots,$$

wobei sich die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ durch die Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= \alpha A + b \\ C &= \alpha B + \beta A + c \\ D &= \alpha C + \beta B + \gamma A + d \\ E &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \end{aligned}$$

u. s. w.

Das allgemeine Glied der Reihe oder den Coefficienten der Potenz z^n findet man aber durch Zerlegung des gegebenen Bruches in einfache Brüche, welche, wie solches im 13. Capitel gezeigt worden ist, die Factoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots$ zu Nennern haben.

§ 334.

Die Form des allgemeinen Gliedes hängt aber vornehmlich ab von der Art der einfachen Factoren des Nenners, ob dieselben nämlich reell oder imaginär, und ob sie alle von einander verschieden, oder zwei oder mehrere von ihnen gleich sind. Um diese verschiedenen Fälle der Reihe nach durchzugehen, nehmen wir zunächst an, dass alle einfachen Factoren des Nenners **reell** und von einander **verschieden** seien. Sind daher:

$$(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)(1 - sz)\cdots$$

die sämtlichen einfachen Factoren des Nenners, so lässt sich der gegebene Bruch in die folgenden einfachen Brüche zerlegen:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1 - qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - rz} + \frac{\mathfrak{D}}{1 - sz} + \cdots$$

Hat man also diese Brüche gefunden und entwickelt, so ist das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe gleich

$$z^n(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \mathfrak{D}s^n + \cdots),$$

und dieses wollen wir gleich Pz^n setzen. Es soll nämlich P der Coefficient der Potenz z^n und ferner $Q, R\ldots$ die Coefficienten der folgenden Potenzen sein, so dass also die rekurrente Reihe wird:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \cdots$$

§ 335.

Wir setzen nun voraus, dass n eine sehr grosse Zahl, dass also die rekurrente Reihe auf sehr viele Glieder fortgesetzt sei. Weil nun gleichhohe Potenzen von ungleichen Zahlen von einander verschieden sind, und zwar um so mehr, je grösser der Exponent ist, so wird von den einzelnen Grössen $\mathfrak{A}p^n$, $\mathfrak{B}q^n$, $\mathfrak{C}r^n, \ldots$, diejenige, welche aus der grössten der Zahlen $p, q, r\ldots$ entspringt, die andern an Grösse weit übertreffen, und es werden somit die andern im Vergleich zu dieser einen vollständig verschwinden, wenn n geradezu eine unendlich grosse Zahl ist. Da nun die Zahlen $p, q, r\ldots$ von einander verschieden sein sollen, so möge p die grösste unter ihnen sein. Es wird daher, sobald n unendlich gross genommen wird,

$$P = \mathfrak{A}p^n.$$

Ist aber n nur eine sehr grosse Zahl, so wird nur annähernd $P = \mathfrak{A}p^n$ sein. Ebenso ist:

$$Q = \mathfrak{A}p^{n+1},$$

und somit:

$$\frac{Q}{P} = p.$$

Daraus geht hervor, dass, wenn die rekurrente Reihe weit genug fortgesetzt ist, der Coefficient irgend eines Gliedes durch den des vorhergehenden dividirt den Wert der **grössten** Zahl p annähernd genau ausdrücken wird.

§ 336.

Wenn daher der Nenner des gegebenen Bruches:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

lauter reelle und ungleiche einfache Factoren hat, so kann man mittelst der daraus entspringenden rekurrenten Reihe einen der einfachen Factoren finden, nämlich denjenigen Factor $1 - pz$, in welchem die Zahl p den grössten Wert besitzt. Dabei kommen die Coefficienten des Zählers $a, b, c, d\ldots$ nicht in Betracht: es ergiebt sich, wie man dieselben auch annehmen möge, doch stets derselbe Wert für die grösste Zahl p. Ganz genau richtig findet man den Wert von p allerdings erst dann, wenn man die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt hat; wenn man aber auch nur eine grössere Anzahl von Gliedern der Reihe gefunden hat, so wird doch der Wert von p dem wahren Werte um so näher kommen, je grösser die Anzahl der Glieder war und je mehr der Wert von p die Werte von $q, r, s\ldots$ übertrifft. Dabei ist es völlig gleichgültig, ob diese grösste Zahl p positiv oder negativ ist, weil die Potenzen derselben in beiden Fällen in derselben Weise wachsen.

§ 337.

In welcher Weise nun diese Untersuchung auf die Berechnung der Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung Anwendung finden könne, ist hiernach hinlänglich ersichtlich. Denn sind die Factoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots$ bekannt, so findet man aus diesen leicht die Wurzeln der Gleichung:

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots = 0.$$

Ist nämlich $1 - pz$ ein Factor jenes Nenners, so ist $z = \frac{1}{p}$ eine Wurzel dieser Gleichung. Da man nun die grösste Zahl p aus der rekurrenten

Reihe findet, so erhält man eben auf diese Weise die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0.$$

Setzt man aber $z = \frac{1}{x}$, so dass dadurch die Gleichung:

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \cdots = 0$$

entsteht, so ergiebt sich mittelst dieses Verfahrens die grösste Wurzel $x = p$ dieser letzteren Gleichung.

§ 338.

Wenn also die Gleichung:

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \cdots = 0$$

gegeben ist, in welcher alle Wurzeln reell und von einander verschieden sind, so findet man die grösste von diesen Wurzeln auf folgende Weise: Man bilde aus den Coefficienten dieser Gleichung den Bruch:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots},$$

und leite daraus die rekurrente Reihe her, indem man den Zähler des Bruches, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Anfangsglieder der Reihe nach Belieben annimmt. Ist diese Reihe gleich:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots,$$

so wird der Bruch $\frac{Q}{P}$ den Wert der grössten Wurzel x der gegebenen Gleichung um so genauer angeben, je grösser die Zahl n ist.

Erstes Beispiel.

Man soll die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

bestimmen.

Bildet man den Bruch:

$$\frac{a + bz}{1 - 3z - z^2},$$

und setzt man die ersten beiden Glieder der daraus entstehenden Reihe gleich 1 und 2, so wird diese Reihe:

$$1, 2, 7, 23, 76, 251, 829, 2738, \ldots.$$

Es giebt daher der Bruch $\frac{2738}{829}$ nahezu genau den Wert der grössten Wurzel der gegebenen Gleichung. Verwandelt man diesen Bruch in einen Decimalbruch, so findet man denselben gleich:

$$3{,}3027744,$$

während der wahre Wert der grössten Wurzel gleich

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3{,}3027756$$

ist, so dass sich also die beiden Werte nur um $\frac{1}{1000000}$ unterscheiden. Uebrigens ist zu bemerken, dass die Brüche $\frac{Q}{P}$ abwechselnd grösser und kleiner sind als der wahre Wert der Wurzel.

Zweites Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$$

gegeben, deren Wurzeln die Sinus dreier Bogen sind, die dreifach genommen den Sinus $\frac{1}{2}$ haben.

Nachdem man die Gleichung auf die Form:

$$1 - 6x + 8x^3 = 0$$

gebracht hat, suche man, um bei ganzen Zahlen zu bleiben, die kleinste Wurzel, so dass man nicht erst $\frac{1}{z}$ für x zu setzen braucht. Bildet man dann den Bruch:

$$\frac{a + bx + cx^2}{1 - 6x + 8x^3},$$

und nimmt man, weil dadurch die Rechnung am leichtesten wird, die drei Anfangsglieder der Reihe gleich 0, 0, 1 an und lässt zugleich die Potenzen von x weg, da man nur die Coefficienten braucht, so erhält man folgende rekurrente Reihe:

$$0, 0, 1, 6, 36, 208, 1200, 6912, 39808, 229248 \ldots;$$

Es ist daher die kleinste Wurzel der Gleichung nahezu gleich:

$$\frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0{,}1736515,$$

und dieses müsste der Sinus eines Winkels von 10° sein. Aus den Tafeln findet man aber für diesen den Werth 0,1736482, welcher um $\frac{33}{10000000}$ kleiner als der gefundene ist.

Noch leichter kann man eben dieselbe Wurzel dadurch finden, dass man $x = \frac{1}{2}y$ setzt, wodurch sich die Gleichung:

$$1 - 3y + y^3 = 0$$

ergiebt. Aus dieser entspringt auf eine ähnliche Weise die Reihe:

$$0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 9,\ 26,\ 75,\ 216,\ 622,\ 1791,\ 5157\ldots,$$

und es wird daher die kleinste Wurzel der Gleichung nahezu gleich:

$$y = \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0{,}3472949,$$

woraus sich

$$x = \frac{1}{2}y = 0{,}1736474$$

ergiebt. Dieser Wert aber ist noch um vieles genauer, als der vorhergehende.

Drittes Beispiel.

Würde von eben derselben Gleichung:

$$0 = 1 - 6x + 8x^3$$

die grösste Wurzel verlangt, so setze man $x = \frac{y}{2}$, wodurch man

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

erhält. Für diese Gleichung findet man die grösste Wurzel mittelst der rekurrenten Reihe, deren Beziehungsskala (0, 3, — 1) ist. Es wird daher diese Reihe, wenn man die drei Anfangsglieder nach Belieben annimmt:

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 5,\ 4,\ 13,\ 7,\ 35,\ 8,\ 98,\ -11,\ldots$$

Da man in dieser Reihe zu negativen Gliedern kommt, so ist dies ein Zeichen dafür, dass die grösste Wurzel negativ ist. In der Tat ist $x = -\sin 70° = -0{,}9396926$. Man muss daher hierauf bei den Anfangsgliedern Rücksicht nehmen, wie es z. B. in folgender Reihe geschehen ist:

$$1 - 2 + 4 - 7 + 14 - 25 + 49 - 89 + 172 - 316 + 605 - \cdots$$

Hieraus würde sich

$$y = \frac{-605}{316} \text{ und } x = -\frac{605}{632} = -0{,}957$$

ergeben, welcher Wert jedoch von dem wahren Werte beträchtlich abweicht.

§ 339.

Der Grund dieser Abweichung liegt vornehmlich darin, dass die Wurzeln der gegebenen Gleichung $\sin 10°$, $\sin 50°$ und $-\sin 70°$ sind, und dass somit die beiden grössten Wurzeln sich so wenig von einander unterscheiden, dass die zweite Wurzel $\sin 50°$ in den Coefficienten der Potenzen, bis zu welchen man die Reihe fortgesetzt hat, noch ein beträchtliches Verhältnis zu der grössten Wurzel hat und daher nicht im Vergleich zu dieser verschwindet. Hiervon hängen auch die grossen Unterschiede ab, um welche die gefundenen Werte abwechselnd zu gross oder zu klein sind. So wird, wenn man

$$y = \frac{-316}{172} \text{ nimmt, } x = \frac{-158}{172} = \frac{-79}{86} = -0{,}918.$$

Da nämlich die Potenzen der grössten Wurzel abwechselnd positiv und negativ sind, so werden auch die Potenzen der zweiten Wurzel abwechselnd addirt und subtrahirt; es müsste daher, soll diese Abweichung nicht mehr merklich sein, die Reihe noch sehr viel weiter fortgesetzt werden.

§ 340.

Man kann jedoch diesem Uebelstande auch dadurch abhelfen, dass man die Gleichung mittelst einer geeigneten Substitution auf eine Form bringt, bei welcher die Wurzelwerte einander nicht mehr so nahe liegen. Setzt man z. B. in der Gleichung:

$$0 = 1 - 6x + 8x^3,$$

deren Wurzeln $-\sin 70°$, $+\sin 50°$, $+\sin 10°$ sind, $x = y - 1$, so werden $1 - \sin 70°$, $1 + \sin 50°$, $1 + \sin 10°$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = 8y^3 - 24y^2 + 18y - 1$$

sein, und es ist demnach für diese $1 - \sin 70°$ die kleinste Wurzel, während $\sin 70°$ die grösste Wurzel der vorigen Gleichung war; hingegen ist $1 + \sin 50°$ im gegenwärtigen Falle die grösste Wurzel, während vorher $\sin 50°$ die mittlere Wurzel war. Man kann also auf diese Weise durch eine Substitution jede Wurzel in die grösste oder kleinste Wurzel der neuen Gleichung verwandeln und dieselbe demnach durch das eben beschriebene Verfahren bestimmen. Da überdies in diesem Beispiel die Wurzel $1 - \sin 70°$ um vieles kleiner ist, als die beiden übrigen, so lässt sie sich auch leicht durch eine rekurrente Reihe annähernd bestimmen.

Viertes Beispiel.

Man soll die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$0 = 8y^3 - 24y^2 + 18y - 1$$

finden, welche von 1 abgezogen den Sinus des Winkels von 70° liefert.

Setzt man $y = \frac{1}{2}z$, so dass

$$0 = z^3 - 6z^2 + 9z - 1$$

wird, so findet man die kleinste Wurzel dieser Gleichung durch eine rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala (9, —6, +1), die grösste Wurzel hingegen durch eine solche mit der Beziehungsskala (6, —9, +1). Bildet man also für die kleinste Wurzel die Reihe:

$$1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, \ldots,$$

so wird näherungsweise:

$$z = \frac{17593}{145861} = 0{,}12061483 \text{ und } y = 0{,}06030741,$$

mithin:

$$\sin 70^\circ = 1 - y = 0{,}93969258,$$

welcher Wert selbst in der letzten Stelle noch richtig ist. Aus diesem Beispiele ist daher ersichtlich, einen wie grossen Nutzen eine zweckmässige Umformung der Gleichung mittelst einer Substitution bei der Berechnung ihrer Wurzeln gewährt, und ferner dass das angeführte Verfahren nicht nur auf die Berechnung der grössten und kleinsten Wurzel anwendbar ist, sondern auch alle Wurzeln liefert.

§ 341.

Hat man also bereits irgend eine Wurzel der gegebenen Gleichung näherungsweise bestimmt, so dass z. B. die Zahl k möglichst wenig von dem wahren Werte einer Wurzel abweicht, so setze man $x - k = y$ oder $x = y + k$. Dadurch erhält man eine Gleichung, deren kleinste Wurzel gleich $x - k$ ist. Bestimmt man diese mittelst einer rekurrenten Reihe, was sehr leicht ist, da diese Wurzel sehr viel kleiner ist als die übrigen, so erhält man durch Addition derselben zu k den richtigen Wert von x für die gegebene Gleichung. Dieser Kunstgriff bleibt selbst dann noch anwendbar, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln besitzt.

§ 342.

Ganz unentbehrlich ist dieser Kunstgriff sogar in dem Falle, wenn die Gleichung zwei **gleiche**, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln hat. Wenn nämlich eine Gleichung, deren grösste Wurzel p ist, auch die Wurzel $-p$ hat, so würde man diese Wurzel p selbst dann nicht erhalten, wenn man auch die rekurrente Reihe bis ins Unendliche fortsetzen wollte. Um dies an einem Beispiele zu erläutern, sei die Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$$

gegeben. Dieselbe besitzt die grösste Wurzel $\sqrt{5}$, ausserdem aber auch noch die Wurzel $-\sqrt{5}$. Wollte man nun, um die grösste Wurzel zu finden, das vorher beschriebene Verfahren anwenden und die rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala (1, +5, —5), nämlich die Reihe:

$$1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, \ldots$$

bilden, so würde der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder niemals constant werden. Dagegen werden hier die Quotienten aus den wechselsweise genommenen Gliedern einander gleich, und zwar findet man so, indem man jedes Glied durch das zweitvorige dividirt, das Quadrat der grössten Wurzel. So ist z. B. näherungsweise:

$$5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}.$$

So oft sich daher die wechselsweise genommenen Glieder einem constanten Verhältnisse nähern, erhält man jedesmal das Quadrat der gesuchten Wurzel näherungsweise. Die Wurzel $x = \sqrt{5}$ selbst aber findet man dadurch, dass man $x = y + 2$ setzt. Dadurch geht die gegebene Gleichung in die folgende über:

$$1 - 3y - 5y^2 - y^3 = 0,$$

deren kleinste Wurzel aus der Reihe

$$1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, \ldots$$

erhalten wird. Sie ist nämlich nahezu gleich

$$\frac{2585}{10945} = 0{,}2361,$$

während 2,2361 näherungsweise gleich $\sqrt{5}$, d. h. gleich der grössten Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

§ 343.

Obwohl der Zähler des Bruches, aus welchem die rekurrente Reihe gebildet wird, nach Belieben angenommen werden darf, so trägt doch eine geschickte Wahl desselben sehr viel dazu bei, den Wert der Wurzel schnell mit grosser Annäherung zu bestimmen. Denn da das allgemeine Glied der rekurrenten Reihe, wenn man die Factoren des Nenners so wie oben im § 334 annimmt, gleich $z^n(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \cdots)$ ist, und die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ sich aus dem Zähler des Bruches bestimmen, so kann $\mathfrak{A}$ in dem einen Falle einen grossen, in einem anderen einen kleinen Wert erhalten, und es wird im ersten Falle die grösste Wurzel p sehr bald, im letzten aber nur langsam gefunden werden. Ja man kann sogar den Zähler so annehmen, dass $\mathfrak{A}$ vollständig verschwindet, und in diesem Falle wird die Reihe, selbst wenn sie ins Unendliche fortgesetzt wird, überhaupt niemals die grösste Wurzel p liefern. Dieser Fall tritt aber ein, wenn der Zähler so angenommen wird, dass er selbst den Factor $1 - pz$ besitzt, da dieser alsdann vollständig aus der Rechnung verschwindet. Ist z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0$$

gegeben, deren grösste Wurzel gleich 3 ist, und bildet man daraus den Bruch:

$$\frac{1-3z}{1-6z+10z^2-3z^3},$$

so dass die Beziehungsskala der rekurrenten Reihe $(6, -10, +3)$ wäre, so erhielte man die Reihe:

$$1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377, \ldots,$$

in welcher sich die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder durchaus nicht dem Werte $\frac{1}{3}$ nähern. Vielmehr entspringt dieselbe Reihe auch aus dem Bruche:

$$\frac{1}{1-3z+z^2},$$

sie liefert demnach die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^2-3x+1=0.$$

§ 344.

Es kann jedoch der Zähler auch so angenommen werden, dass man mittelst der rekurrenten Reihe eine jede Wurzel der Gleichung findet, und zwar erreicht man dies dadurch, dass man als Zähler das Product aus allen Factoren des Nenners mit Ausnahme desjenigen, welcher der zu findenden Wurzel entspricht, nimmt. Wählt man z. B. im vorigen Beispiele $1-3z+z^2$ als Zähler, so liefert der Bruch:

$$\frac{1-3z+z^2}{1-6z+10z^2-3z^3}$$

die rekurrente Reihe:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243, \ldots,$$

und diese zeigt, da sie eine geometrische ist, sofort die Wurzel $x=3$ an. Jener Bruch ist nämlich dem einfachen Bruche $\frac{1}{1-3z}$ gleich. Daraus geht hervor, dass, wenn man die Anfangsglieder, welche ja beliebig angenommen werden dürfen, so annimmt, dass sie eine geometrische Progression bilden, deren Verhältniszahl gleich einer Wurzel der Gleichung ist, alsdann die ganze rekurrente Reihe eine geometrische wird, und dass sie daher gerade diese Wurzel giebt, obwohl dieselbe weder die grösste noch die kleinste ist.

§ 345.

Damit man also nicht, während man die grösste oder kleinste Wurzel sucht, wider Erwarten durch die rekurrente Reihe auf eine andere Wurzel

geführt werde, muss man den Zähler so wählen, dass er mit dem Nenner keinen Factor gemeinsam hat, und dies erreicht man, wenn man als Zähler die Einheit nimmt, wodurch das erste Glied der Reihe gleich 1 wird, und sodann aus diesem einzigen Gliede nach der Beziehungsskala alle folgenden Glieder bestimmt. Auf diese Weise findet man dann sicher, je nachdem es vorgeschrieben war, die grösste oder die kleinste Wurzel der Gleichung. Ist z. B. die Gleichung:

$$y^3-3y+1=0$$

gegeben, und soll deren grösste Wurzel bestimmt werden, so entspringt aus der Beziehungsskala $(0, +3, -1)$, wenn man mit 1 anfängt, die rekurrente Reihe:

$$1-0+3-1+9-6+28-27+90-109+297-517+1000-1848 \\ +3517-6544+\cdots,$$

in welcher sich die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder offenbar einer constanten Grösse nähern, und welche zeigt, dass die grösste Wurzel negativ und nahezu gleich

$$y=\frac{-6544}{3517}=-1{,}860676$$

ist, während sie in Wahrheit $-1{,}86793852$ sein müsste. Als Grund dafür, dass die Annäherung an den wahren Wert so langsam erfolgt, ist bereits früher der angegeben worden, dass die andere Wurzel nicht viel kleiner als die grösste und zugleich positiv ist.

§ 346.

Wenn man das, was wir sowohl im Allgemeinen als im Anschluss an die angeführten Beispiele auseinandergesetzt haben, wohl überlegt, so wird man den grossen Nutzen dieses Verfahrens zur Berechnung der Wurzeln der Gleichungen deutlich erkennen. Auch die Kunstgriffe, durch welche man die Rechnung abkürzen und leichter machen kann, sind hinlänglich erklärt worden, so dass nichts mehr hinzuzufügen bliebe, wenn wir nicht noch die Fälle, in denen die Gleichung gleiche oder imaginäre Wurzeln besitzt, berücksichtigen müssten. Wir nehmen also an, dass der Nenner des Bruches:

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$$

den Factor $(1-pz)^2$ besitze, während die anderen Factoren $1-qz,\ 1-rz, \cdots$ seien. Alsdann ist das allgemeine Glied der daraus entstehenden rekurrenten Reihe:

$$z^n\big((n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n+\cdots\big).$$

Um nun zu beurteilen, welchen Wert dasselbe annimmt, sobald n eine sehr grosse Zahl ist, müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nämlich p die grösste von allen Wurzeln $p, q, r \ldots$ darstellt oder nicht. Im ersten Falle, wo p die grösste Wurzel ist, können die übrigen Glieder $\mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}q^n + \cdots$ wegen des Coefficienten $n+1$ nicht so schnell gegen ihn verschwinden wie vorher. Ist aber $q > p$, so wird das Glied $(n+1)\,\mathfrak{A}p^n$ auch nur sehr langsam im Vergleich zu $\mathfrak{C}q^n$ verschwinden, so dass also die Berechnung der grössten Wurzel hier sehr beschwerlich ist.

Erstes Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

gegeben, deren grösste Wurzel 2 zweimal vorkommt.

Man suche diese grösste Wurzel auf die vorher beschriebene Weise durch Entwicklung des Bruches:

$$\frac{1}{1 - 3z + 4z^3}.$$

Dieselbe liefert folgende rekurrente Reihe:

$$1,\ 3,\ 9,\ 23,\ 57,\ 135,\ 313,\ 711,\ 1593,\ \ldots,$$

bei welcher jedes Glied durch das vorhergehende dividirt eine Zahl giebt, welche grösser ist als 2. Der Grund hiervon erhellt leicht aus dem allgemeinen Gliede. Denn lässt man in demselben die Glieder $\mathfrak{C}q^n \ldots$ weg, so wird das der Potenz z^n entsprechende Glied gleich

$$(n+1)\,\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}p^n,$$

das folgende gleich

$$(n+2)\,\mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}p^{n+1},$$

und dieses giebt durch jenes dividirt:

$$\frac{(n+2)\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{(n+1)\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}\,p,$$

eine Zahl, die stets grösser als p ist, wofern nicht n bereits unendlich gross geworden ist.

Zweites Beispiel.

Ist jetzt die Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

gegeben, deren grösste Wurzel gleich 3 ist, während die beiden anderen gleich -1 sind, so suche man die grösste Wurzel mittelst einer rekurrenten Reihe, deren Beziehungsskala $(1, +5, +3)$ ist. Diese Reihe wird:

$$1,\ 1,\ 6,\ 14,\ 47,\ 135,\ 412,\ 1228,\ \ldots$$

Dieselbe giebt daher ziemlich schnell den Wert 3, weil die Potenzen der kleineren Wurzel -1 trotz der Multiplikation mit $n+1$ doch bald im Vergleich zu den Potenzen von 3 verschwinden.

Drittes Beispiel.

Ist aber die Gleichung:

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$$

gegeben, deren Wurzeln $3, -2, -2$ sind, so wird sich die grösste Wurzel viel langsamer ergeben. Denn man erhält die Reihe:

$$1,\ -1,\ 9,\ -5,\ 65,\ 3,\ 457,\ 347,\ 3345,\ 4915,\ \ldots,$$

welche man noch sehr weit fortsetzen müsste, ehe man daraus erkennen könnte, dass die aus ihr sich ergebende Wurzel gleich 3 sei.

§ 347.

Wenn drei Factoren des Nenners einander gleich sind, wenn derselbe also einen Factor $(1 - pz)^3$ und noch andere $1 - qz$, $1 - rz$, ... besitzt, so ist das allgemeine Glied der daraus entstehenden rekurrenten Reihe:

$$z^n\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}\,\mathfrak{A}p^n + (n+1)\,\mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}p^n + \mathfrak{D}q^n + \mathfrak{E}r^n + \cdots\right).$$

Ist daher p die grösste Wurzel und die Zahl n so gross, dass die Potenzen $q^n, r^n \ldots$ im Vergleich zu p^n verschwinden, so erhält man aus der rekurrenten Reihe den Ausdruck:

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\,\mathfrak{A} + (n+2)\,\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,\mathfrak{A} + (n+1)\,\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}\,p,$$

welcher aber nur dann den wahren Wert der Wurzel p darstellen wird, wenn n eine überaus, ja gleichsam unendlich grosse Zahl ist. Es ist aber jener Ausdruck gleich:

$$p + \frac{(n+2)\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,\mathfrak{A} + (n+1)\,\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}\,p.$$

Wäre aber p nicht die grösste Wurzel, so würde die Berechnung derselben noch weit mehr Schwierigkeiten verursachen. Daraus folgt, dass die Gleichungen, welche gleiche Wurzeln besitzen, auf diesem Wege mittelst der rekurrenten Reihen weit schwieriger aufzulösen sind, als wenn alle Wurzeln von einander verschieden sind.

§ 348.

Sehen wir jetzt zu, wie die ins Unendliche fortgesetzte rekurrente Reihe beschaffen sein muss, wenn der Nenner des Bruches **imaginäre Factoren** hat. Es besitze also der Nenner des Bruches:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

die reellen Factoren $1 - qz$, $1 - rz$, ... und ausserdem den trinomischen Factor $1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2$, welcher zwei einfache imaginäre Factoren in sich schliesst. Ist nun die aus jenem Bruche entspringende rekurrente Reihe die folgende:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots,$$

so ist nach dem, was wir oben (im 13. Capitel) gehabt haben, der Coefficient:

$$P = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}\, p^n + \mathfrak{C}q^n + \mathfrak{D}r^n + \cdots$$

Ist also die Zahl p kleiner als jede der übrigen $q, r, \ldots$, so dass also die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \cdots = 0$$

reell ist, so findet man diese mittelst der rekurrenten Reihen ebenso, als ob gar keine imaginären Wurzeln vorhanden wären.

§ 349.

Die Berechnung der grössten reellen Wurzel kann also auch beim Vorhandensein imaginärer Wurzeln in derselben Weise wie vorher geschehen, falls diese letzteren so beschaffen sind, dass das Product aus je zweien, welche einen reellen Factor ergeben, nicht grösser ist als das Quadrat der grössten Wurzel. Sind aber zwei imaginäre Wurzeln von solcher Beschaffenheit vorhanden, dass ihr Product ebenso gross oder grösser ist als das Quadrat der grössten reellen Wurzel, so findet man auf die vorher angegebene Weise nichts, weil die Potenz p^n gegen dieselbe Potenz der grössten reellen Wurzel gehalten niemals verschwindet, wenn man auch die Reihe ins Unendliche fortsetzt. Um dies zu erläutern, wollen wir einige Beispiele anführen.

Erstes Beispiel.

Es soll die grösste Wurzel der Gleichung:

$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

gefunden werden.

Löst man diese Gleichung in die beiden Factoren:

$$(x-2)(x^2+2x+2)$$

auf, so folgt hieraus, dass dieselbe eine reelle Wurzel gleich 2 und noch zwei imaginäre Wurzeln hat, deren Product gleich 2, also kleiner als das Quadrat der reellen Wurzel ist. Man kann die letztere also auf dem vorher

beschriebenen Wege finden. Bildet man dazu die rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala (0, +2, +4), nämlich:

$$1,\ 0,\ 2,\ 4,\ 4,\ 16,\ 24,\ 48,\ 112,\ 192,\ 416,\ 832,\ \ldots,$$

so lässt sich aus derselben hinreichend deutlich die reelle Wurzel 2 erkennen.

Zweites Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$$

gegeben, bei welcher die eine reelle Wurzel gleich 2, das Product der beiden imaginären aber gleich 4, also gleich dem Quadrate der reellen Wurzel ist.

Man suche also die Wurzel mittelst einer rekurrenten Reihe und setze dazu, um sich die Rechnung zu erleichtern, $x = 2y$. Dadurch entsteht die Gleichung:

$$y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$$

und aus dieser die rekurrente Reihe:

$$1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \ldots$$

Da nun in dieser Reihe stets dieselben Glieder wiederkehren, so lässt sich daraus weiter nichts schliessen, als dass die grösste Wurzel entweder nicht reell ist, oder dass zwei imaginäre Wurzeln vorhanden sind, deren Product entweder ebenso gross oder grösser ist, als das Quadrat der reellen Wurzel.

Drittes Beispiel.

Es sei jetzt die Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

gegeben, bei welcher die reelle Wurzel gleich 1, das Product der imaginären aber gleich 2 ist.

Bildet man gemäss der Beziehungsskala (3, −4, 2) die Reihe:

$$1,\ 3,\ 5,\ 5,\ 1,\ -7,\ -15,\ -15,\ +1,\ 33,\ 65,\ 65,\ 1\ \ldots,$$

so sind in dieser die Glieder bald positiv, bald negativ, und man kann daher hieraus die reelle Wurzel 1 in keiner Weise erkennen. Dergleichen Unregelmässigkeiten sind allemal ein Kennzeichen dafür, dass die Wurzel, welche die Reihe liefern müsste, imaginär ist.

In der Tat ist hier das Product der imaginären Wuzeln grösser als das Quadrat der reellen Wurzel 1.

§ 350.

Ist also in dem allgemeinen Bruche das Product zweier imaginären Wurzeln p^2 grösser als das Quadrat irgend einer reellen Wurzel, so dass die Potenzen q^n, r^n, ..., wenn n eine unendlich grosse Zahl ist, im Vergleich zu p^n verschwinden, so wird:

$$P = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi} p^n,$$

$$Q = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} p^{n+1},$$

und somit:

$$\frac{Q}{P} = \frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi} p.$$

Dieser Ausdruck nimmt niemals einen constanten Wert an, wenn auch n ins Unendliche wächst, da die Sinus der Winkel stets sehr veränderlich bleiben, so dass sie bald positiv, bald negativ sind.

§ 351.

Wenn man indessen die beiden Brüche $\frac{R}{Q}$ und $\frac{S}{R}$ in derselben Weise bestimmt und daraus die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eliminirt, wodurch zugleich die Zahl n aus der Rechnung wegfällt, so findet man:

$$Pp^2 + R = 2Qp\cos\varphi,$$

und daher:

$$\cos\varphi = \frac{Pp^2+R}{2Qp}.$$

Ebenso wird:

$$\cos\varphi = \frac{Qp^2+S}{2Rp}.$$

Durch Vergleichung dieser beiden Werte ergiebt sich:

$$p = \sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}},$$

und

$$\cos\varphi = \frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)(R^2-QS)}}.$$

Wenn man daher die rekurrente Reihe bereits so weit fortgesetzt hat, dass die Potenzen der anderen Wurzeln im Vergleich zu p^n verschwinden, so kann man auch den trinomischen Factor $1-2pz\cos\varphi+p^2z^2$ auf diesem Wege bestimmen.

§ 352.

Da die dazu erforderliche Rechnung aber für Ungeübte Schwierigkeiten haben könnte, so wollen wir dieselbe vollständig hersetzen. Aus dem gefundenen Werte von $\frac{Q}{P}$ folgt:

$$\mathfrak{A}Pp\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}Pp\sin(n+1)\varphi = \mathfrak{A}Q\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}Q\sin n\varphi,$$

und hieraus:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{Q\sin n\varphi - Pp\sin(n+1)\varphi}{Pp\sin(n+2)\varphi - Q\sin(n+1)\varphi}.$$

Ebenso wird:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{R\sin(n+1)\varphi - Qp\sin(n+2)\varphi}{Qp\sin(n+3)\varphi - R\sin(n+2)\varphi}.$$

Setzt man diese beiden Werte einander gleich, so erhält man:

$$0 = \begin{cases} Q^2p\sin n\varphi\sin(n+3)\varphi - Q^2p\sin(n+1)\varphi\sin(n+2)\varphi \\ -QR\sin n\varphi\sin(n+2)\varphi + QR\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\varphi \\ -PQp^2\sin(n+1)\varphi\sin(n+3)\varphi + PQp^2\sin(n+2)\varphi\sin(n+2)\varphi. \end{cases}$$

Da aber

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

ist, so entsteht hieraus die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2}Q^2p(\cos 3\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{2}QR(1-\cos 2\varphi) + \frac{1}{2}PQp^2(1-\cos 2\varphi),$$

und diese geht, wenn man sie durch $\frac{1}{2}Q$ dividirt, in die folgende über:

$$(Pp^2+R)(1-\cos 2\varphi) = Qp(\cos\varphi - \cos 3\varphi).$$

Nun ist aber:

$$\cos\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi$$

und

$$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi,$$

daher:

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi = 2\sin 2\varphi\sin\varphi = 4\sin^2\varphi\cos\varphi$$

und

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi.$$

Folglich ist:

$$Pp^2 + R = 2Qp\cos\varphi,$$

also:

$$\cos\varphi = \frac{Pp^2+R}{2Qp}.$$

Ebenso ist:

$$\cos\varphi = \frac{Qp^2+S}{2Rp}.$$

Hieraus ergeben sich aber die oben angegebenen Werte:

$$p=\sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}},$$

und

$$\cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)\,(R^2-QS)}}.$$

§ 353.

Wenn aber der Nenner des Bruches, aus welchem die rekurrente Reihe gebildet wird, mehrere einander gleiche trinomische Factoren besitzt, so geht aus der oben angegebenen Form des allgemeinen Gliedes hervor, dass alsdann die Berechnung der Wurzeln noch weit unsicherer wird. Ist indessen irgend eine reelle Wurzel bereits näherungsweise bekannt, so kann stets der Wert eben dieser Wurzel durch Transformation der Gleichung noch weit genauer gefunden werden. Setzt man nämlich x gleich der Summe aus y und jenem schon gefundenen Werte, und sucht man sodann die kleinste Wurzel der neuen Gleichung für y, so liefert dieselbe, wenn man sie zu jenem Werte addirt, den genauen Wert von x.

Beispiel.

Es sei die Gleichung:

$$x^3-3x^2+5x-4=0$$

gegeben, von welcher man daraus, dass für $x=1$:

$$x^3-3x^2+5x-4=-1$$

wird, weiss, dass die eine Wurzel nahezu gleich 1 ist.

Man setze also $x=1+y$, wodurch die neue Gleichung:

$$1-2y-y^3=0$$

entsteht. Bildet man hieraus, um die kleinste Wurzel zu finden, die rekurrente Reihe mit der Beziehungsskala $(2,\ 0,\ +1)$, nämlich:

$$1,\ 2,\ 4,\ 9,\ 20,\ 44,\ 97,\ 214,\ 472,\ 1041,\ 2296,\ldots,$$

so erhält man dadurch als kleinste Wurzel näherungsweise:

$$y=\frac{1041}{2296}=0{,}453397$$

und daher:

$$x=1{,}453397.$$

Diesen Wert dürfte man auf anderem Wege schwerlich so leicht und so genau finden können.

§ 354.

Wenn sich aber irgend eine rekurrente Reihe schliesslich mehr und mehr einer geometrischen Progression nähert, so lässt sich auch aus dem Fortschreitungsgesetz derselben unmittelbar erkennen, von welcher Gleichung der Quotient, welchen man durch Division irgend eines Gliedes durch das vorhergehende erhält, eine Wurzel ist. Es seien nämlich $P, Q, R, S, T,\ldots$ sehr weit vom Anfang entfernte Glieder einer rekurrenten Reihe, und von der Art, dass man sie als Glieder einer geometrischen Progression betrachten kann, und es sei ferner:

$$T=\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P,$$

so dass $(\alpha,\ +\beta,\ +\gamma,\ +\delta)$ die Beziehungsskala der Reihe darstellt. Setzt man dann den Wert von $\frac{Q}{P}=x$, so wird $\frac{R}{P}=x^2$, $\frac{S}{P}=x^3$, $\frac{T}{P}=x^4$, und wenn man diese Werte in die eben angegebene Gleichung einsetzt, so wird:

$$x^4=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,$$

woraus hervorgeht, dass der Quotient $\frac{Q}{P}$ schliesslich eine Wurzel der gefundenen Gleichung liefern wird. Eben dieses lehrt aber auch die vorhergehende Methode, und ferner, dass der Bruch $\frac{Q}{P}$ auch zugleich die grösste Wurzel der Gleichung darstellt.

§ 355.

Man kann dieses Verfahren, die Wurzeln der Gleichungen zu berechnen, auch dann noch zuweilen mit Vorteil anwenden, wenn die Anzahl der Glieder einer Gleichung unendlich ist. Um dies zu zeigen, sei die Gleichung:

$$\frac{1}{2}=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{5040}+\cdots$$

gegeben, deren kleinste Wurzel z den Bogen eines Winkels von 30°, oder den sechsten Theil des halben Kreisumfanges darstellt. Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$1-2z+\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{60}+\frac{z^7}{2520}-\cdots=0,$$

und bildet man gemäss der ins Unendliche fortgehenden Beziehungsskala:

$$2,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ +\frac{1}{60},\ 0,\ -\frac{1}{2520},\ 0,\ \cdots,$$

die rekurrente Reihe:

$$1,\ 2,\ 4,\ \frac{23}{3},\ \frac{44}{3},\ \frac{1681}{60},\ \frac{2408}{45},\ \cdots,$$

so wird daraus näherungsweise:

$$z = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0{,}52356.$$

Aus dem bekannten Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser ergiebt sich aber: $z = 0{,}523598$, so dass also die gefundene Wurzel nur um $\frac{3}{100000}$ von dem wahren Werte abweicht. Es ist jedoch das ein sehr vorteilhafter Umstand bei der gegebenen Gleichung, dass alle ihre Wurzeln reell sind, und dass die anderen Wurzeln sehr beträchtlich von der kleinsten verschieden sind. Da diese Bedingungen aber nur sehr selten bei Gleichungen mit unendlich vielen Gliedern erfüllt sind, so ist das angegebene Verfahren auch nur selten zur Berechnung ihrer Wurzeln brauchbar.

18. Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

§ 356.

Nachdem ich in den vorhergehenden Capiteln sowohl über die unendlichen Reihen, als auch über die aus unendlich vielen Factoren bestehenden Producte gehandelt habe, glaube ich auch noch Einiges über die dritte Art unendlicher Ausdrücke, nämlich über die Kettenbrüche, hinzufügen zu müssen. Denn obwohl die Theorie dieser Brüche bisher noch wenig ausgebildet ist, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass man dereinst in der Analysis des Unendlichen einen sehr ausgedehnten Gebrauch davon machen wird. Die Proben, die ich bereits öfter davon gegeben habe, machen die Erfüllung dieser Erwartung in hohem Grade wahrscheinlich. Besonders aber gewährt die Untersuchung, die ich mir im gegenwärtigen Capitel anzustellen vorgenommen habe, der Arithmetik und der gemeinen Algebra nicht zu unterschätzende Hülfsmittel.

§ 357.

Ich verstehe aber unter einem Kettenbruche einen Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem andern Bruche besteht, dessen Nenner seinerseits wieder das Aggregat aus einer ganzen Zahl und einem Bruche ist, der wieder ebenso beschaffen ist. Die Reihe dieser Brüche kann sich dabei ins Unendliche erstrecken, oder auch an irgend einer Stelle abbrechen. Derartige Kettenbrüche sind z. B. die folgenden Ausdrücke:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \cdots}}}}} \qquad \text{oder} \qquad a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \cdots}}}}}$$

In der ersten Form sind die Zähler der Brüche sämtlich gleich 1, und diesen Fall werden wir vorzugsweise betrachten, in der andern Form dagegen sind die Zähler der Brüche irgend welche Zahlen.

§ 358.

Nachdem wir so die Form dieser Kettenbrüche beschrieben haben, müssen wir zunächst sehen, wie man den Wert derselben in der gewöhnlichen Weise ausdrücken kann. Um diesen um so leichter zu finden, gehen wir schrittweise vor, indem wir jene Brüche zuerst beim ersten, dann beim zweiten, dann beim dritten Bruche u. s. w. abbrechen. Dadurch erhält man:

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}} = \frac{abcde + abe + ade + cde + abc + a + c + e}{bcde + be + de + bc + 1}$$

u. s. w.

§ 359.

Obwohl sich bei diesen gewöhnlichen Brüchen das **Gesetz**, nach welchem die Zähler und Nenner aus den Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ gebildet werden, nicht so leicht erkennen lässt, so sieht man doch bei einiger Aufmerksamkeit bald, auf welche Art ein jeder dieser Brüche aus den vorhergehenden entsteht. Es ist nämlich jeder Zähler das Aggregat aus dem mit einem neuen Buchstaben multiplicirten letzten und dem einfach genommenen vorletzten Zähler. Eben dasselbe Gesetz befolgen die Nenner. Schreibt man daher die Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ der Reihe nach hin, so kann man daraus die gefundenen Brüche auf folgende Weise bilden:

$$\begin{array}{cccccc} & a, & b, & c, & d, & e \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+a+c}{bc+1}, & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}, & \ldots, \end{array}$$

und zwar findet man hierbei den Zähler irgend eines Bruches, indem man den unmittelbar vorhergehenden mit dem darüber stehenden Index multiplicirt und zum Producte den vorletzten Zähler addirt. Dasselbe Gesetz gilt auch für die Nenner. Damit man aber diese Regel von Anfang an in Anwendung bringen könne, habe ich den Bruch $\frac{1}{0}$ vorangesetzt. Denn obwohl derselbe nicht aus dem Kettenbruche entsteht, so macht er doch das Fortschreitungsgesetz deutlicher. Es stellt aber jeder Bruch den Wert des Kettenbruches bis zu dem Buchstaben einschliesslich dar, welcher über dem unmittelbar vorhergehenden Bruche steht.

§ 360.

Ebenso ergiebt die andere Art der Kettenbrüche:

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \cdots}}}}},$$

je nachdem man sie an dieser oder jener Stelle abbricht, die folgenden Werte:

$$a = a.$$

$$a + \frac{\alpha}{b} = \frac{ab + \alpha}{b}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

u. s. w.,

und jeder dieser Brüche lässt sich aus den beiden vorhergehenden auf folgende Weise finden:

$$\begin{array}{cccccc} & a, & b, & c, & d, & e \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+\alpha}{b}, & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}, & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} & \\ & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon. \end{array}$$

§ 361.

Man schreibe nämlich über die zu bildenden Brüche die Indices $a, b, c, d, \ldots$, unter dieselben aber die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Ferner setze man an die erste Stelle den Bruch $\frac{1}{0}$, an die zweite aber $\frac{a}{1}$. Alsdann findet man jeden folgenden Bruch, indem man den Zähler des unmittelbar vorhergehenden mit dem darüber stehenden, den Zähler des vorletzten Bruches dagegen mit dem unter ihm stehenden Index multiplicirt und die Producte addirt; das Aggregat ist der Zähler des nächsten Bruches. Ebenso ist der Nenner desselben das Aggregat der Producte, welche man erhält, wenn man den Nenner des letzten Bruches mit dem darüber stehenden und den Nenner des vorletzten Bruches mit dem unter ihm stehenden Index multiplicirt. Ein jeder der so gefundenen Brüche aber stellt den Wert des Kettenbruches dar, wenn derselbe bis zu demjenigen Nenner einschliesslich fortgesetzt wird, welcher dem vorhergehenden Bruche überschrieben ist.

§ 362.

Wenn man daher die Reihe dieser Brüche soweit fortsetzt, als der Kettenbruch Indices giebt, so stellt der letzte Bruch den **wahren Wert** des Kettenbruches dar. Die vorhergehenden Brüche aber kommen diesem Werte immer näher und geben daher ein sehr geeignetes **Annäherungsverfahren** an die Hand.

Setzen wir nämlich den wahren Wert des Kettenbruches gleich x, also:

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\cdots}}}}=x,$$

so ist offenbar der erste Bruch $\frac{1}{0}$ grösser als x, der zweite $\frac{a}{1}$ aber kleiner als x, der dritte $a+\frac{\alpha}{b}$ wieder grösser, der vierte wiederum kleiner als x, und so geht es weiter, indem diese Brüche abwechselnd grösser und kleiner sind als x. Ferner aber ist ersichtlich, dass jeder Bruch dem wahren Werte von x näher kommt, als irgend einer der vorhergehenden, und man erhält daher auf diese Weise sehr schnell und bequem den Wert von x näherungsweise. Dies findet auch dann statt, wenn der Kettenbruch ins Unendliche fortgeht, wofern nur die Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ nicht zu sehr wachsen. Sind aber die Zähler sämtlich gleich 1, so ist die näherungsweise Berechnung mit gar keiner Schwierigkeit verbunden.

§ 363.

Damit man den Grund dieser Annäherung an den wahren Wert des Kettenbruches besser einzusehen vermöge, wollen wir die Unterschiede zwischen den verschiedenen Brüchen betrachten. Lässt man dabei den

ersten Bruch $\frac{1}{0}$ bei Seite, so ist der Unterschied zwischen dem zweiten und dritten gleich

$$\frac{\alpha}{b},$$

der Unterschied zwischen dem dritten und vierten gleich

$$\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)},$$

der Unterschied zwischen dem vierten und fünften gleich

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$$

u. s. w. Es wird daher der **Wert** des Kettenbruches **durch** eine gewöhnliche **Reihe** von Gliedern dargestellt wie folgt:

$$x=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\cdots,$$

und diese Reihe bricht jederzeit ab, wenn der Kettenbruch nicht ins Unendliche fortgeht.

§ 364.

Wir haben somit ein Mittel gefunden, um einen Kettenbruch in eine Reihe von Gliedern zu verwandeln, deren Vorzeichen stets abwechseln, falls der erste Buchstabe a verschwindet.

Ist nämlich:

$$x=\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\cdots}}}}},$$

so ist nach dem, was wir soeben gefunden haben:

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$$
$$-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$$

Wenn daher $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ keine beständig wachsenden Zahlen, sondern etwa sämtlich gleich 1 sind, während die Nenner $a, b, c, d, \ldots$ irgend welche positiven ganzen Zahlen bedeuten, so wird der Wert des Kettenbruches durch eine sehr stark convergirende Reihe von Gliedern darstellbar sein.

§ 365.

Wenn man dies wohl überlegt hat, so wird man auch **umgekehrt** eine jede Reihe von Gliedern mit abwechselnden Vorzeichen in einen Kettenbruch verwandeln, oder also einen Kettenbruch finden können, dessen Wert gleich der Summe der gegebenen Reihe ist.

Ist nämlich die Reihe:

$$x = A - B + C - D + E - F + \cdots$$

gegeben, so erhält man, wenn man die einzelnen Glieder derselben den entsprechenden Gliedern der aus dem Kettenbruche entstandenen Reihe gleich setzt:

$$A = \frac{\alpha}{b} \qquad \text{folglich:} \quad \alpha = Ab$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{bc + \beta} \qquad \text{„} \qquad \beta = \frac{Bbc}{A - B}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd + \beta d + \gamma b} \qquad \text{„} \qquad \gamma = \frac{Cd(bc + \beta)}{b(B - C)}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc + \beta)}{bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta} \qquad \text{„} \qquad \delta = \frac{De(bcd + \beta d + \gamma b)}{(bc + \beta)(C - D)}.$$

Da nun aber

$$\beta = \frac{Bbc}{A - B}$$

ist, so wird:

$$bc + \beta = \frac{Abc}{A - B},$$

und daher:

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A - B)(B - C)}.$$

Ferner ist:

$$bcd + \beta d + \gamma b = (bc + \beta)d + \gamma b = \frac{Abcd}{A - B} + \frac{ACbcd}{(A - B)(B - C)} = \frac{ABbcd}{(A - B)(B - C)},$$

folglich:

$$\frac{bcd + \beta d + \gamma b}{bc + \beta} = \frac{Bd}{B - C},$$

und daher:

$$\delta = \frac{BDde}{(B - C)(C - D)}.$$

Ebenso findet man:

$$\varepsilon = \frac{CEef}{(C - D)(D - E)}$$

u. s. w.

§ 366.

Damit dies Gesetz um so deutlicher hervortrete, nehmen wir an, es sei:

$$\begin{aligned}
P &= b \\
Q &= bc + \beta \\
R &= bcd + \beta d + \gamma b \\
S &= bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta \\
T &= bcdef + \beta def + \gamma bef + \delta bcf + \varepsilon bcd + \varepsilon\beta d + \varepsilon\gamma b + \beta\delta f \\
V &= bcdefg + \beta defg + \gamma befg + \delta bcfg + \varepsilon bcdg + \varepsilon bcde + \varepsilon\beta dg + \varepsilon\beta de + \varepsilon\gamma bg \\
&\quad + \varepsilon\gamma be + \beta\delta fg + \varepsilon\delta bc + \varepsilon\beta\delta.
\end{aligned}$$

Dann ist nach dem Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke gebildet werden:

$$\begin{aligned}
Q &= Pc + \beta \\
R &= Qd + \gamma P \\
S &= Re + \delta Q \\
T &= Sf + \varepsilon R \\
V &= Tg + \zeta S.
\end{aligned}$$

Es ist daher in diesen Buchstaben:

$$x = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha\beta}{PQ} + \frac{\alpha\beta\gamma}{QR} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST} - \cdots$$

§ 367.

Da wir nun:

$$x = A - B + C - D + E - F + \cdots$$

gesetzt haben, so wird:

$$A = \frac{\alpha}{P}, \text{ also } \alpha = AP$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{Q}, \quad \text{„} \quad \beta = \frac{BQ}{A}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma P}{R}, \quad \text{„} \quad \gamma = \frac{CR}{BP}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta Q}{S}, \quad \text{„} \quad \delta = \frac{DS}{CQ}$$

$$\frac{E}{D} = \frac{\varepsilon R}{T}, \quad \text{„} \quad \varepsilon = \frac{ET}{DR}$$

u. s. w.

Nimmt man aber die Differenzen, so hat man:

$$A-B=\frac{\alpha(Q-\beta)}{PQ}=\frac{\alpha c}{Q}=\frac{APc}{Q}$$
$$B-C=\frac{\alpha\beta(R-\gamma P)}{PQR}=\frac{\alpha\beta d}{PR}=\frac{BQd}{R}$$
$$C-D=\frac{\alpha\beta\gamma(S-\delta Q)}{QRS}=\frac{\alpha\beta\gamma e}{QS}=\frac{CRe}{S}$$
$$D-E=\frac{\alpha\beta\gamma\delta(T-\varepsilon R)}{RST}=\frac{\alpha\beta\gamma\delta f}{RT}=\frac{DSf}{T}$$

u. s. w.

Multiplicirt man je zwei aufeinanderfolgende Differenzen, so ergiebt sich:

$$(A-B)(B-C)=ABcd\cdot\frac{P}{R},\ \text{und}\ \frac{R}{P}=\frac{ABcd}{(A-B)(B-C)}$$
$$(B-C)(C-D)=BCde\cdot\frac{Q}{S},\ \text{„}\ \frac{S}{Q}=\frac{BCde}{(B-C)(C-D)}$$
$$(C-D)(D-E)=CDef\cdot\frac{R}{T},\ \text{„}\ \frac{T}{R}=\frac{CDef}{(C-D)(D-E)}$$

u. s. w.

Da nun

$$P=b,\ Q=\frac{\alpha c}{A-B}=\frac{Abc}{A-B}$$

ist, so wird:

$$\alpha=Ab$$
$$\beta=\frac{Bbc}{A-B}$$
$$\gamma=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$
$$\delta=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$
$$\varepsilon=\frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

u. s. w.

§ 368.

Nachdem wir nun die Werte der Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ gefunden haben, können wir die Nenner $b, c, d, e, \ldots$ nach Belieben annehmen; doch ist es gut, dieselben so zu wählen, dass sie nicht allein selbst ganze Zahlen sind, sondern dass sich auch für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ganze Werte

ergeben. Es hängt dies jedoch auch noch von der Beschaffenheit der Zahlen $A, B, C, D, \ldots$ ab, je nachdem dieselben ganze oder gebrochene Zahlen sind. Nimmt man diese als ganze Zahlen an, so wird der gestellten Anforderung genügt, wenn man:

$$\begin{array}{lll} b=1, & \text{also} & \alpha=A, \\ c=A-B, & \text{„} & \beta=B, \\ d=B-C, & \text{„} & \gamma=AC, \\ e=C-D, & \text{„} & \delta=BD, \\ f=D-E, & \text{„} & \varepsilon=CE, \end{array}$$

u. s. w.

setzt.

Ist demnach:

$$x=A-B+C-D+E-F+\cdots,$$

so kann der Wert von x durch einen Kettenbruch folgendermassen ausgedrückt werden:

$$x=\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D+\cfrac{CE}{D-E+\cdots}}}}}$$

§ 369.

Wenn jedoch alle Glieder der Reihe gebrochene Zahlen sind, so dass

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\cdots$$

ist, so erhält man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ die folgenden Werte:

$$\alpha=\frac{b}{A}$$
$$\beta=\frac{Abc}{B-A}$$
$$\gamma=\frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)}$$
$$\delta=\frac{C^2de}{(C-B)(D-C)}$$
$$\varepsilon=\frac{D^2ef}{(D-C)(E-D)}$$

u. s. w.

Wird daher

$$\begin{array}{lcl} b=A, & \text{mithin} & \alpha=1 \\ c=B-A, & „ & \beta=A^2 \\ d=C-B, & „ & \gamma=B^2 \\ e=D-C, & „ & \delta=C^2 \\ & \text{u. s. w.} & \end{array}$$

gesetzt, so ergiebt sich für x der Kettenbruch:

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A^2}{B-A+\cfrac{B^2}{C-B+\cfrac{C^2}{D-C+\cdots}}}}$$

Erstes Beispiel.

Die unendliche Reihe:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Da hier

$$A=1,\quad B=2,\quad C=3,\quad D=4,\ldots$$

und der Wert der gegebenen Reihe gleich log 2 ist, so wird:

$$\log 2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\cdots}}}}}}$$

Zweites Beispiel.

Die unendliche Reihe:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots,$$

worin π den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 bedeutet, in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Setzt man für $A, B, C, D, \ldots$ die Zahlen 1, 3, 5, 7 ... ein, so entsteht der Bruch:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}},$$

und hieraus durch Umkehrung desselben:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}$$

Diesen Ausdruck hat zuerst Brouncker für den Kreisumfang gegeben.

Drittes Beispiel.

Ist die unendliche Reihe:

$$x=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\cdots$$

gegeben, so lässt sich dieselbe, da hier

$$A=m,\quad B=m+n,\quad C=m+2n,\ldots$$

ist, in den folgenden Kettenbruch verwandeln:

$$x=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\cdots}}}}},$$

und daraus wird durch Umkehrung desselben:

$$\frac{1}{x}-m=\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\cdots}}}}$$

Viertes Beispiel.

Da wir oben im § 178 gefunden haben, dass

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\cdots$$

ist, so hat man für den Kettenbruch:

$$A=m,\quad B=n-m,\quad C=n+m,\quad D=2n-m,\ldots;$$

derselbe wird daher:

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n-2m+\cfrac{(n-m)^2}{2m+\cfrac{(n+m)^2}{n-2m+\cfrac{(2n-m)^2}{2m+\cfrac{(2n+m)^2}{n-2m+\cdots}}}}}}$$

§ 370.

Wenn die Glieder der gegebenen Reihe Producte sind, bei denen die Anzahl der Factoren mehr und mehr wächst, wie in der Reihe:

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABCD}+\frac{1}{ABCDE}-\cdots,$$

so ergeben sich folgende Werte:

$$\alpha=\frac{b}{A}$$

$$\beta=\frac{bc}{B-1}$$

$$\gamma=\frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$\delta=\frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

$$\varepsilon=\frac{Def}{(D-1)(E-1)}$$

u. s. w.

Setzt man daher:

$$\begin{aligned} b&=A, && \text{also}\quad \alpha=1\\ c&=B-1, && \text{„}\quad \beta=A\\ d&=C-1, && \text{„}\quad \gamma=B\\ e&=D-1, && \text{„}\quad \delta=C\\ f&=E-1, && \text{„}\quad \varepsilon=D \end{aligned}$$

u. s. w.,

so erhält man den Bruch:

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1+\cfrac{D}{E-1+\cdots}}}}}$$

Erstes Beispiel.

Bezeichnet e die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus gleich 1 ist, so fanden wir oben:

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$$

oder:

$$1-\frac{1}{e}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

Setzt man daher:

$$A=1,\quad B=2,\quad C=3,\quad D=4,\ldots,$$

so lässt sich diese Reihe in den folgenden Kettenbruch verwandeln:

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}}},$$

oder wenn man den Anfang durch Umkehrung des Bruches symmetrischer macht:

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}}$$

Zweites Beispiel.

Ferner fanden wir für den Cosinus des Bogens, der dem Halbmesser gleich ist, die Reihe:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 12}-\frac{1}{2\cdot 12\cdot 30}+\frac{1}{2\cdot 12\cdot 30\cdot 56}-\cdots$$

Setzt man daher:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 12,\ D = 30,\ E = 56,\ \ldots,$$

und bezeichnet man den Cosinus des Bogens, der dem Halbmesser gleich ist, mit x, so wird:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \cdots}}}}},$$

oder:

$$\frac{1}{x} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \cdots}}}}$$

§ 371.

Sind aber die Glieder der Reihe mit den Gliedern einer geometrischen Reihe verbunden, oder ist:

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - Fz^5 + \cdots,$$

so wird:

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbcz}{A - Bz}$$

$$\gamma = \frac{ACcdz}{(A - Bz)(B - Cz)}$$

$$\delta = \frac{BDdez}{(B - Cz)(C - Dz)}$$

$$\varepsilon = \frac{CEefz}{(C - Dz)(D - Ez)}$$

u. s. w.

Setzt man daher jetzt:

$$\begin{array}{lcl} b = 1, & \text{also} & \alpha = A \\ c = A - Bz, & „ & \beta = Bz \\ d = B - Cz, & „ & \gamma = ACz \\ e = C - Dz, & „ & \delta = BDz \end{array}$$

u. s. w.,

so erhält man:

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{ACz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz + \cdots}}}}$$

§ 372.

Um nun diesen Fall etwas allgemeiner zu machen, setzen wir:

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \cdots$$

Hieraus ergeben sich durch Vergleichung mit dem Früheren die Werte:

$$\alpha = \frac{Ab}{L}$$

$$\beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy}$$

$$\gamma = \frac{ACM^2cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)}$$

$$\delta = \frac{BDN^2deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)}$$

u. s. w.

Setzt man daher:

$$\begin{array}{lcl} b = L, & \text{also} & \alpha = A \\ c = AMz - BLy, & „ & \beta = BL^2y \\ d = BNz - CMy, & „ & \gamma = ACM^2yz \\ e = COz - DNy, & „ & \delta = BDN^2yz \\ f = DPz - EOy, & „ & \varepsilon = CEO^2yz \end{array}$$

u. s. w.,

so erhält man für die gegebene Reihe den folgenden Kettenbruch:

$$x = \cfrac{A}{L + \cfrac{BL^2y}{AMz - BLy + \cfrac{ACM^2yz}{BNz - CMy + \cfrac{BDN^2yz}{COz - DNy + \cdots}}}}$$

§ 373.

Hat endlich die gegebene Reihe die folgende Form:

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LMz} + \frac{ABCy^2}{LMNz^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNOz^3} + \cdots,$$

so ergeben sich die folgenden Werte:

$$\alpha = \frac{Ab}{L}$$
$$\beta = \frac{Bbcy}{Mz - By}$$
$$\gamma = \frac{CMcdyz}{(Mz - By)(Nz - Cy)}$$
$$\delta = \frac{DNdeyz}{(Nz - Cy)(Oz - Dy)}$$
$$\varepsilon = \frac{EOefyz}{(Oz - Dy)(Pz - Ey)}$$

u. s. w.

Setzt man daher, um ganze Werte zu erhalten:

$$\begin{array}{lll} b = Lz, & \text{also} & \alpha = Az \\ c = Mz - By, & ,, & \beta = BLyz \\ d = Nz - Cy, & ,, & \gamma = CMyz \\ e = Oz - Dy, & ,, & \delta = DNyz \\ f = Pz - Ey, & ,, & \varepsilon = EOyz \end{array}$$

u. s. w.,

so wird die gegebene Reihe durch folgenden Kettenbruch dargestellt:

$$x = \cfrac{Az}{Lz + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \cdots}}}},$$

oder, wenn das Fortschreitungsgesetz gleich am Anfang deutlich hervortreten soll, durch folgenden:

$$\frac{Az}{x} - Ay = Lz - Ay + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \cdots}}}.$$

§ 374.

Auf diese Weise lassen sich unzählig viele ins Unendliche sich erstreckende Kettenbrüche finden, deren genauer Wert angegeben werden kann. Da man nämlich nach dem, was eben auseinandergesetzt worden ist, alle unendlichen Reihen, deren Summen bekannt sind, hierzu

verwenden kann, so lässt sich eben auch der Wert des Kettenbruches, in welchen eine jede Reihe verwandelt werden kann, finden, indem derselbe gleich der Summe dieser Reihe ist. Die bereits angeführten Beispiele genügen, um dies zu zeigen. Indessen wäre es immerhin wünschenswert, ein Verfahren zu finden, mittelst dessen man den Wert eines gegebenen Kettenbruches unmittelbar darstellen könnte. Denn obwohl man einen Kettenbruch in eine unendliche Reihe, deren Wert sich nach bekannten Methoden finden lässt, verwandeln kann, so wird diese Reihe doch häufig so verwickelt, dass man ihre Summe, obschon dieselbe sehr einfach sein kann, entweder gar nicht oder nur mit grosser Mühe anzugeben im Stande ist.

§ 375.

Damit man deutlich erkenne, dass es solche Kettenbrüche giebt, deren Wert auf anderm Wege sehr leicht erhalten werden kann, obwohl die unendlichen Reihen, in welche sie sich verwandeln lassen, keinen Schluss auf ihren eigentlichen Wert gestatten, wollen wir den folgenden Kettenbruch betrachten:

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}},$$

dessen Nenner sämtlich einander gleich sind. Bilden wir daraus auf die oben beschriebene Weise die Brüche:

$$0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2, \ldots,$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70}, \ldots,$$

so entspringt hieraus die Reihe:

$$x = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 12} - \frac{1}{12 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 70} - \cdots,$$

oder, wenn man je zwei Glieder vereinigt,

$$x = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 29} + \frac{2}{29 \cdot 169} + \cdots,$$

oder auch:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2 \cdot 12} - \frac{2}{12 \cdot 70} - \cdots$$

Ferner ist aus der ersten Reihe für x:

$$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 12} - \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 29} + \cdots$$

und es wird auch:

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{1\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 12} + \frac{1}{5\cdot 29} - \frac{1}{12\cdot 70} + \cdots$$

Obwohl nun diese Reihen sehr stark convergiren, so lässt sich doch aus ihrer Form kein Schluss auf ihre eigentliche Summe ziehen.

§ 376.

Für solche Kettenbrüche aber, in welchen die **Nenner** entweder sämtlich einander **gleich** sind, oder doch ebendieselben Nenner immer **wiederkehren**, so dass, wenn man vom Anfang einige Glieder abschneidet, der dadurch entstehende Bruch immer noch dem ganzen Bruche gleich bleibt, giebt es ein sehr einfaches Mittel, ihren Wert zu bestimmen. So ist in dem angeführten Beispiele, in welchem

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

war,

$$x = \frac{1}{2+x},$$

daher:

$$x^2 + 2x = 1,$$

und

$$x + 1 = \sqrt{2},$$

so dass also der Wert dieses Kettenbruches gleich

$$\sqrt{2} - 1$$

ist. Die vorher aus dem Kettenbruche hergeleiteten gewöhnlichen Brüche nähern sich diesem Werte immer mehr, und zwar so schnell, dass man schwerlich ein besseres Verfahren, diesen irrationalen Wert durch rationale Zahlen näherungsweise auszudrücken, wird finden können. Es ist nämlich $\sqrt{2} - 1$ so nahe gleich $\frac{29}{70}$, dass der Fehler kaum merklich ist. Denn zieht man die Quadratwurzel aus, so erhält man:

$$\sqrt{2} - 1 = 0{,}41421356237,$$

während

$$\frac{29}{70} = 0{,}41428571428$$

ist, so dass also der Fehler erst die Hunderttausendstel betrifft.

§ 377.

Ebenso nun, wie die Kettenbrüche ein sehr bequemes Hülfsmittel an die Hand geben, um den Wert von $\sqrt{2}$ näherungsweise zu bestimmen, öffnen sie auch den Weg, auf welchem man zur näherungsweisen Berechnung der **Wurzeln** anderer Zahlen gelangt. Setzen wir zu dem Zwecke:

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots,}}}}}$$

so wird:

$$x = \frac{1}{a + x},$$

also:

$$x^2 + ax = 1,$$

oder:

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+4} - a}{2}.$$

Es kann also dieser Kettenbruch dazu dienen, den Wert der Quadratwurzel aus der Zahl $a^2 + 4$ zu bestimmen.

Setzt man daher für a der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$, und bringt man die Wurzeln auf ihre einfachste Gestalt, so findet man hierdurch $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{53}, \ldots$ nämlich:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \ldots \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{5}, & \frac{5}{8}, \ldots = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, \ldots \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{5}, & \frac{5}{12}, & \frac{12}{29}, & \frac{29}{70}, \ldots = \sqrt{2}-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3, \ldots \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{3}{10}, & \frac{10}{33}, & \frac{33}{109}, & \frac{109}{360}, \ldots = \frac{\sqrt{13}-3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 4, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4, \ldots \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{4}, & \frac{4}{17}, & \frac{17}{72}, & \frac{72}{305}, & \frac{305}{1292}, \ldots = \sqrt{5}-2 \end{array}$$

u. s. w.

Dabei ist zu bemerken, dass die Annäherung um so schneller erfolgt, je grösser a ist. So ist in dem letzten Beispiel, in welchem $\sqrt{5}=2+\frac{305}{1292}$ ist, der Fehler kleiner als $\frac{1}{1292 \cdot 5473}$, wo 5473 der Nenner des folgenden Bruches $\frac{1292}{5473}$ ist.

§ 378.

Auf diese Weise können aber nur die Wurzeln aus solchen Zahlen gefunden werden, die Summen zweier Quadrate sind. Um daher dieses Näherungsverfahren auch auf andere Zahlen auszudehnen, setzen wir:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots}}}}}}$$

Dann ist:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}=\frac{b+x}{ab+1+ax},$$

also:

$$ax^2+abx=b,$$

folglich:

$$x=-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}}=\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}.$$

Hieraus können bereits die **Quadratwurzeln aller Zahlen** gefunden werden. Ist z. B. $a=2$, $b=7$, so wird:

$$x=\frac{-14+\sqrt{14 \cdot 18}}{4}=\frac{-7+3\sqrt{7}}{2}.$$

Diesen Wert von x stellen die folgenden Brüche näherungsweise dar:

$$2,\quad 7,\quad 2,\quad 7,\quad 2,\quad 7, \ldots$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{15},\ \frac{15}{32},\ \frac{112}{239},\ \frac{239}{510}, \ldots$$

Es ist daher nahezu:

$$\frac{-7+3\sqrt{7}}{2}=\frac{239}{510}, \quad \text{also} \quad \sqrt{7}=\frac{2024}{765}=2{,}6457516,$$

während in Wirklichkeit

$$\sqrt{7}=2{,}64575131$$

ist. Es ist also hier der Fehler kleiner als $\frac{3}{10000000}$.

§ 379.

Geht man noch weiter vor, indem man

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}}}}$$

setzt, so ist:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{c+x}{bc+1+bx}}=\frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c},$$

oder:

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1,$$

und daher:

$$x=\frac{-abc-a+b-c+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

Hierbei ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen wiederum die Summe zweier Quadrate. Man kann somit mittelst dieser Form auch nur die Wurzeln aus solchen Zahlen ziehen, aus denen man sie bereits nach der ersten Form berechnen konnte. Ebenso reicht die Form des Kettenbruches, in welcher die vier Nenner a, b, c, d fortwährend in derselben Reihenfolge wiederkehren nicht weiter als die zweite, in welcher nur zwei verschiedene Buchstaben auftraten, u. s. w.

§ 380.

Da also die Kettenbrüche mit so grossem Vorteil bei der Ausziehung der Quadratwurzel Anwendung finden, so können sie auch dazu dienen, die **quadratischen Gleichungen aufzulösen.** Dies geht aus der angeführten Rechnung schon von selbst hervor, da ja x aus einer quadratischen Gleichung bestimmt wird. Man kann aber auch leicht umgekehrt die Wurzel einer jeden quadratischen Gleichung durch einen Kettenbruch darstellen. Ist nämlich die Gleichung:

$$x^2 = ax + b$$

gegeben, so findet man hieraus:

$$x = a + \frac{b}{x}.$$

Setzt man daher wieder in dem letzten Gliede für x den eben gefundenen Wert ein, so wird:

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{x}},$$

und indem man so weiter fortfährt, erhält man x dargestellt durch den Kettenbruch:

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}},$$

der jedoch deshalb keinen so bequemen Gebrauch gestattet, weil die Zähler b keine Einheiten sind.

§ 381.

Um nun auch den Nutzen, den die Kettenbrüche in der Arithmetik gewähren, zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass jeder gewöhnliche Bruch in einen Kettenbruch **verwandelt** werden kann. Ist nämlich der Bruch $x = \frac{A}{B}$ gegeben, worin $A > B$ sein möge, so dividire man A durch B; dies gebe den Quotienten a und den Rest C. Hierauf dividire man den vorhergehenden Divisor B durch den Rest C; der Quotient sei b und der Rest D. Durch diesen Rest dividire man wieder den vorhergehenden Divisor und setze diese Operation, welche man gewöhnlich bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen A und B anwendet, so lange fort, bis sie von selbst aufhört.

Man rechne also nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{llllll}
B \,|\, A = a & & & & \\
\quad C \,|\, B = b & & & & \\
\qquad D \,|\, C = c & & & & \\
\qquad\quad E \,|\, D = d & & & & \\
\qquad\qquad F \ldots & & & &
\end{array}$$

Dann folgt aus der besonderen Natur der Division:

$$A = aB + C, \quad \text{also} \quad \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B},$$

$$B = bC + D, \quad \text{„} \quad \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}, \quad \frac{C}{B} = \cfrac{1}{b + \cfrac{D}{C}},$$

$$C = cD + E, \quad \text{„} \quad \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D}, \quad \frac{D}{C} = \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}},$$

$$D = dE + F, \quad \text{„} \quad \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E}, \quad \frac{E}{D} = \cfrac{1}{d + \cfrac{F}{E}},$$

u. s. w.

Setzt man daher jeden der folgenden Werte in den vorhergehenden ein, so ergiebt sich:

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}}}.$$

Es wird daher x schliesslich allein durch die Quotienten $a, b, c, d, \ldots$ auf folgende Art ausgedrückt:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \cdots}}}}}$$

Erstes Beispiel.

Ist der Bruch $\frac{1461}{59}$ gegeben, so wird derselbe durch einen Kettenbruch, dessen sämtliche Zähler gleich 1 sind, folgendermassen ausgedrückt. Führt man dieselbe Rechnung aus, mittelst welcher man den grössten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen 59 und 1461 zu suchen pflegt, nämlich:

$$
\begin{array}{l}
59 \,|\, 1461 = 24 \\
\quad 118 \\
\quad 281 \\
\quad 236 \\
\quad\ \ 45 \,|\, 59 = 1 \\
\qquad\quad 45 \\
\qquad\quad 14 \,|\, 45 = 3 \\
\qquad\qquad\ 42 \\
\qquad\qquad\ \ 3 \,|\, 14 = 4 \\
\qquad\qquad\qquad 12 \\
\qquad\qquad\qquad\ 2 \,|\, 3 = 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \,|\, 2 = 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0,
\end{array}
$$

so erhält man aus den gefundenen Quotienten:

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}.$$

Zweites Beispiel.

Auch die **Decimalbrüche** können auf diese Weise umgeformt werden. Ist z. B. der Bruch:

$$\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000}$$

gegeben, so führe man zuerst folgende Rechnung aus:

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314576	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
505080	1219324	2
418328	1010160	2
u. s. w.	209164	

Aus dieser Rechnung geht bereits hervor, dass die Nenner sämtlich gleich 2 sind, und dass daher

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}$$

ist. Dies ist aber bereits aus dem Vorhergehenden (§ 376) bekannt.

Drittes Beispiel.

Besondere Berücksichtigung verdient aber die Zahl e, deren Logarithmus gleich 1, und die selbst gleich $e = 2,7182818284\,59$ ist. Hieraus wird:

$$\frac{e-1}{2} = 0,8591409142295.$$

Behandelt man diesen Decimalbruch auf die eben beschriebene Weise, so erhält man folgende Quotienten:

8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	1408590857704	10
139312557916	1398639960710	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	

u. s. w.

Setzt man diese Rechnung mit einem genaueren Werte von e noch weiter fort, so ergeben sich die Quotienten:

$$1,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34, \ldots,$$

welche nach Weglassung des ersten eine arithmetische Progression bilden. Es ist daher:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

Die genauere Untersuchung dieses Bruches lässt sich nur mittelst der Infinitesimalrechnung führen.

§ 382.

Da man also aus dergleichen Ausdrücken Brüche ableiten kann, welche dem wahren Werte des in Betracht gezogenen Ausdrucks immer näher kommen, so kann man auch dieses Verfahren anwenden, um **Decimalbrüche durch gewöhnliche Brüche näherungsweise auszudrücken.** Ja, wenn ein Bruch gegeben ist, in welchem Zähler und Nenner sehr grosse Zahlen sind, so kann man dafür Brüche finden, die in kleineren Zahlen ausgedrückt und dem gegebenen Bruche zwar nicht vollständig gleich, aber doch nur sehr wenig von ihm verschieden sind. Hierdurch findet eine leichte Erledigung die von Wallis behandelte Aufgabe, wonach man Brüche finden soll, welche, in kleineren Zahlen ausgedrückt, den Wert irgend eines gegebenen Bruches so genau darstellen, als es überhaupt durch Zahlen, die nicht grösser sind, geschehen kann. Die Brüche nämlich, die man auf dem angegebenen Wege erhält, nähern sich dem Werte des Kettenbruches, aus welchem sie abgeleitet werden, so sehr, dass es keine anderen, in nicht grösseren Zahlen ausgedrückten Brüche giebt, welche sich ihm mehr näherten.

Erstes Beispiel.

Es soll das Verhältnis des Durchmessers zum Kreisumfange durch so kleine Zahlen ausgedrückt werden, dass es auf genauere Art nicht geschehen kann, wofern man nicht grössere Zahlen anwendet.

Wenn man den bekannten Decimalbruch:

$$3{,}1415926535\ldots$$

auf die angegebene Weise durch fortgesetzte Division entwickelt, so erhält man folgende Quotienten:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1\ldots,$$

aus denen sodann die Brüche:

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ldots$$

entstehen. Schon der zweite Bruch zeigt an, dass sich der Durchmesser zum Umfange wie $1:3$ verhalte, und in der Tat lässt sich dieses Verhältnis nur durch grössere Zahlen genauer angeben. Der dritte Bruch giebt das von Archimedes angegebene Verhältnis $7:22$, der fünfte das des Metius, welches dem wahren Werte bereits so nahe kommt, dass der Fehler kleiner als $\frac{1}{113\cdot 33102}$ ist. Uebrigens sind die Brüche abwechselnd zu gross und zu klein.

Zweites Beispiel.

Es soll das Verhältnis eines Tages zum mittleren Sonnenjahre in möglichst kleinen Zahlen näherungsweise ausgedrückt werden.

Da dieses Jahr gleich 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 55 Sekunden ist, so hat dasselbe, wenn man die Stunden, Minuten und Sekunden als Bruchteile eines Tages ausdrückt, $365\frac{20935}{86400}$ Tage. Man braucht daher nur diesen Bruch zu entwickeln, wodurch man folgende Quotienten:

$$4,\ 7,\ 1,\ 6,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,$$

und hieraus die Brüche:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{55}{227},\ \frac{63}{260},\ \frac{181}{747},\ldots$$

erhält. Die Stunden, Minuten und Sekunden zusammengenommen, welche das Jahr mehr als 365 Tage enthält, machen also alle vier Jahre ungefähr einen Tag aus. Darauf beruht der **Julianische Kalender.** Genauer gerechnet, ist in 33 Jahren ein Ueberschuss von 8 Tagen, oder in 747 Jahren ein solcher von 181 Tagen, in 400 Jahren also ein Ueberschuss von 97 Tagen vorhanden. Während also der Julianische Kalender in diesem Zeitraum 100 Tage einschaltet, verwandelt der **Gregorianische** in je 400 Jahren drei Schaltjahre in gemeine Jahre.

Druck von Eduard Krause in Berlin.

Studium weder die Zahl noch die Art und Weise, in welcher jene Schriften zugänglich sind; die eigene Beschaffung aber verlangt Opfer, welche zu bringen nur Wenige im Stande sind. Und deshalb, weil Wollen und Können sich nicht decken, bleibt der gute Wille oft hinter der Tat zurück.

Diesem Missstande sollen billige Ausgaben, die es Jedem gestatten, derartige Werke stets bei der Hand zu haben, Abhülfe bringen.

Um die Abziehung vom mathematischen Inhalte auf ein Minimum zu reduciren, werden diese Werke in deutschen Uebersetzungen erscheinen; gleichwohl soll der Geist der Originale mit allen Eigentümlichkeiten der zeitweisen Anschauungen möglichst gewahrt bleiben: es werden historische, nicht kritische Ausgaben geboten.

Als der unterzeichneten Verlagsbuchhandlung der Gedanke zu diesem Unternehmen unterbreitet wurde, ging sie auf diese Anregung um so bereitwilliger ein, als auch von berufener Seite dieser Absicht nicht nur Wohlwollen, sondern auch in liebenswürdigster Weise Unterstützung entgegengebracht wurde. Sie wird den Versuch wagen und einem an massgebender Stelle ausgesprochenen Vorschlage entsprechend zunächst ausser dem vorliegenden

Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* I. Teil,

die folgenden Werke erscheinen lassen:

Cauchy, *Cours d'analyse algébrique.*

Diophantus, *Arithmetica etc.* mit Anmerkungen von Fermat u. A.

Vandermonde, Mathematische Abhandlungen.

Dieselben sind so vorbereitet, dass ihr Erscheinen in nächster Zeit erwartet werden darf. Weitere Ausgaben werden sich im nächsten Jahre anschliessen.

Die Leitung des Unternehmens ist in guten Händen. Tüchtige und geeignete Mitarbeiter sind gewonnen.

Auch bei der äusseren Ausstattung der Bände waltet das Bestreben ob, trotz des billigen Preises möglichst Vollkommenes zu liefern.

Berlin N., Monbijouplatz 3
im October.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer.